Vysoké učení technické v Brně

Fakulta stavební
Ústav stavební mechaniky

Aplikace FyDiK

FyDiK Application

Petr Frantík

© 2011 Petr Frantík

Ústav stavební mechaniky
Fakulta stavební
Vysoké učení technické v Brně
Česká republika

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tento text Vás seznámí s aplikací FyDiK, která slouží k simulaci pohybu pružných těles včetně jejich vzájemných interakcí. V rámci této aplikace můžete provádět výpočty odpovídající úlohám, které se řeší v průběhu studia mechaniky. Například vyvažovat silové soustavy, hledat těžiště průřezů, ohýbat nosníky, počítat síly v prutových soustavách a řešit kmitání konstrukcí zatížených proměnlivým zatížením.

Možnosti této aplikace jsou dokonce nad rámec témat, která se v běžném studiu probírají. Aplikace totiž přirozeně řeší i úlohy nelineární, kdy dochází k velkým posuvům a rotacím, k poškození materiálu či kontaktu různých těles. Neobvyklou vlastností je též možnost zasahovat do právě probíhajícího výpočtu mnoha různými způsoby, které jsou s trochou nadsázky omezené jen Vaší fantazií. Doufám, že Vám aplikace pomůže k nabytí znalostí a zkušeností potřebných pro ovládnutí světa pohybu a deformace těles.

1.1 Spuštění FyDiKu

Aplikaci lze stáhnout z adresy `http://fydik.kitnarf.cz`. K dispozici jsou dvě verze: pro modelování rovinných úloh FyDiK2D a pro trojrozměrné úlohy FyDiK3D. Vyberte FyDiK2D, jelikož tomu se zde budeme přednostně věnovat. Aplikace je na webu přístupná ve formě ZIP archivu. Uložte si tento soubor na počítači. V ZIP archivu se nachází soubory s příponou JAR, které jsou různými jazykovými verzemi aplikace FyDiK. Vybalte ze ZIP souboru jazykovou verzi aplikace, která Vám vyhovuje.

Soubor aplikace FyDiK má příponu JAR. Tato přípona je odvozena od slovního spojení Java archiv. Uvnitř Java archivu je uschováno vše, co je pro běh aplikace potřeba. Do Java archivu je možno nahlédnout a dělat v něm i změny. Kupříkladu je možno měnit textové popisky, které aplikace zobrazuje. Více informací o Java archivu lze získat na internetu [2].

Jakmile je soubor aplikace uložený na disku, zkuste program spustit. Povede se to tehdy, máte-li na svém počítači správně nainstalované prostředí Java. Ke spuštění slouží program jménem `java.exe`. Vyvolejte si příkazový řádek systému a zadejte jméno tohoto souboru. Pokud jej Váš systém najde, vypíše do příkazového řádku možnosti spuštění. Aplikaci FyDiK se spustí buď přímo kliknutím na soubor JAR, nebo je možné využít příkazového řádku a napsat například následující řetězec, jenž závisí na konkrétních jménech:

```
java -jar fydik2dapplication.jar -projectName uloha -directoryName data
```

Poznamenávám, že je v tomto řetězci potřeba použít přesné jméno JAR souboru. Parametry `projectName` a `directoryName` můžete zadat jen pokud chcete.

Nepovede-li se ani po ověření všech zadání aplikaci spustit, pak doporučuji nainstalovat nejnovější Java prostředí z adresy `http://www.java.com`. Do vyhledávače můžete zadat spojení Java JRE. Zkratka JRE má význam Java Runtime Environment, což jednoduše česky znamená prostředí pro běh Javovských programů.

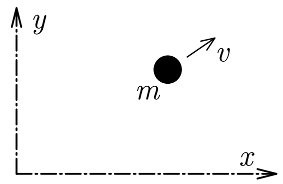
V případě, že ani nová instalace problém nevyřeší, nebo zjistíte jakýkoliv problém, můžete využít fóra na webových stránkách, popř. zašlete dotaz na mou veřejnou e-mailovou adresu.

Kapitola 2

Balistická křivka

První úloha je zaměřena na vytvoření hmotného bodu a jeho rozpohybování. Hmotné body jsou pro použití aplikace FyDiK důležité, jelikož se z nich skládají téměř všechny modely. Lze si je představit jako malé, tuhé a těžké kuličky vyrobené například z oceli. Kuličky jsou to hladké a stejnoměrně zbarvené. Je možné se jich chytit, ale nelze zjišťovat jejich orientaci v prostoru.

U každého hmotného bodu je důležitá jeho aktuální hmotnost m a stav, jenž je dán souřadnicemi x, y a složkami rychlosti v_x a v_y, viz obr. 2.1. Jak se bude stav hmotného bodu vyvíjet v čase, změní se hodnoty těchto veličin, a proto se jim říká *stavové proměnné*.



Obrázek 2.1: Hmotný bod.

Naším úkolem je vystřelit hmotný bod a získat tak balistickou křivku. Balistická křivka vzniká pohybem tělesa v gravitačním poli, a zároveň v prostředí, které tělesu klade odpor. Nejprve vyřešíme tuto úlohu analyticky, a poté si ji namodelujeme.

Ztotožníme směr gravitačního pole se směrem osy y a zanedbejme odpor prostředí. Pro polohu hmotného bodu můžeme psát:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v_x(0)\,t, \\ y(t) &= y(0) + \int_0^t v_y(t)\,dt, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde $x(0)$ a $y(0)$ jsou polohy bodu na počátku (v čase $t = 0$ sekund). Uvedené výrazy (2.1) již počítají s konstantní rychlostí ve vodorovném směru $v_x(t) = v_x(0)$, kde $v_x(0)$ je počáteční rychlost ve vodorovném směru. Složka rychlosti v_y bude časem klesat v důsledku působení gravitace:

$$v_y(t) = v_y(0) - g\,t, \tag{2.2}$$

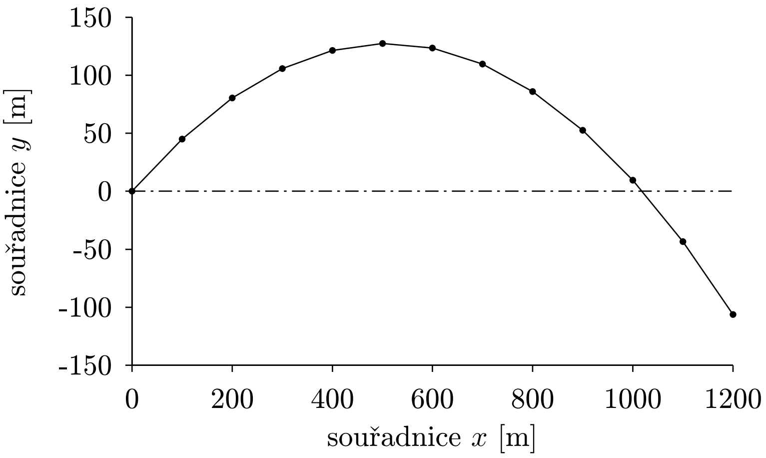
kde g je gravitační zrychlení a $v_y(0)$ je počáteční rychlost ve svislém směru, kladně uvažována vzhůru.

Tento výraz dosadíme do předcházejícího a provedeme integraci. Obdržíme tak řešení bez uvažování odporu prostředí, kterým je kvadratická parabola (tzv. šikmý vrh):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0}\, t, \\ y(t) &= y_0 + v_{y0}\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

přičemž jsme dosadili $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $v_x(0) = v_{x0}$ a $v_y(0) = v_{y0}$. Takové dosazení nazýváme *počátečními podmínkami.* Počáteční podmínky tedy určují hodnoty stavových proměnných na počátku. V našem případě se jedná o počátek v čase $t = 0$ sekund.

Na obrázku 2.2 vidíme znázornění získaného řešení pro počáteční polohu hmotného bodu v počátku souřadného systému, pro počáteční rychlosti $v_{x0} = 100$ m/s, $v_{y0} = 50$ m/s a pro gravitační zrychlení $g = 9.81$ m/s^2.



Obrázek 2.2: Šikmý vrh

Hmotný bod protne osu x v čase $t = 2\, v_{y0}/g$, což odpovídá číslu přibližně 10.19 sekund. Dojde k tomu na souřadnici $x = 2\, v_{x0}\, v_{y0}/g$, vyčíslené na 1.019 kilometru.

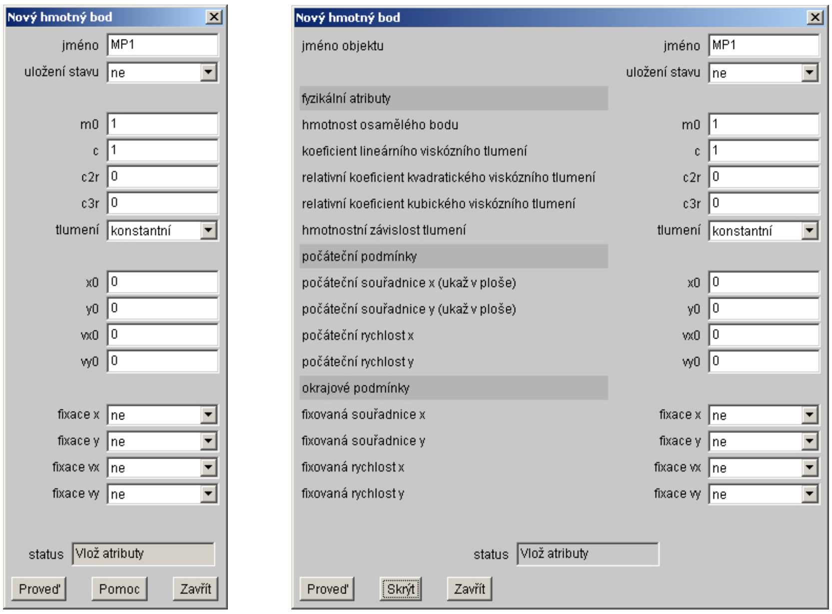
Odvozené řešení neodpovídá přiliš dobře reálnému případu, jelikož neuvažuje odpor prostředí, ve kterém se těleso pohybuje. Tedy pokud nebudeme střílet například na Měsíci, kde je téměř dokonalé vakuum. Pro zahrnutí vlivu prostředí se ve výpočtech běžně používá tzv. odporová síla, která působí proti pohybu tělesa. Tato síla závisí na jeho relativní rychlosti v tekutém prostředí. Lze ji vyjádřit polynomiální závislostí například ve tvaru:

$$F_d(v) = c_1\, v + c_2\, |v|\, v + c_3\, v^3, \tag{2.4}$$

kde F_d je odporová resp. tlumící síla působící proti pohybu tělesa vzhledem k tekutině a c_1, c_2, c_3 jsou koeficienty viskózního tlumení.

Nyní se pokusíme ověřit odvozený vztah a započítat vliv odporu prostředí. Hmotný bod lze vytvořit kliknutím na menu `Objekt - Nový - Hmotný bod`. Tímto způsobem se vyvolá dialog `Nový hmotný bod`, viz obr. 2.3.

Každý dialog dává k dispozici tlačítko `Pomoc`, které zobrazí podrobnější popisy všech parametrů. Nyní si je postupně popíšeme. Každý objekt lze pojmenovat v poli `jméno`. Zvolením položky `uložení stavu` umožníte ukládání stavu objektu do textového souboru, jenž



Obrázek 2.3: Dialog pro vytvoření hmotného bodu

se bude nacházet na stejném místě jako datové soubory projektu (nyní zřejmě v místě, kde je uložen JAR soubor aplikace FyDiK).

Následuje skupina pojmenovaná `fyzikální atributy`, jenž obsahuje výše popsané parametry. První z nich označený m_0 představuje hmotnost osamělého bodu. Celková hmotnost m se totiž může měnit připojením dalších objektů. Následují koeficienty tlumení, které známe z výrazu pro odporovou sílu. Poslední položkou je výběr úpravy tlumící síly. Je-li zvolena možnost `proporcionální`, bude velikost tlumící síly vynásobena hmotností osamělého bodu. Volba `konstantní` ji ponechá nezměněnu.

Oddíl `počáteční podmínky` slouží k nastavení polohy hmotného bodu a jeho rychlosti v čase $t = 0$ sekund. Souřadnice x_0 a y_0 lze určit rovněž kliknutím do pracovní plochy aplikace.

V poslední části pojmenované `okrajové podmínky` lze (i jen dočasně) zajistit neměnnost souřadnice či složky rychlosti.

2.1 Postup

Nejprve vytvoříme tři hmotné body na souřadnicích $x_0 = 0$ m, $y_0 = 0$ m. První z nich ponecháme v počáteční poloze a druhé dva vystřelíme s rychlostmi $v_{x0} = 100$ m/s a $v_{y0} = 50$ m/s. Hmotnost u všech ponecháme 1 kg.

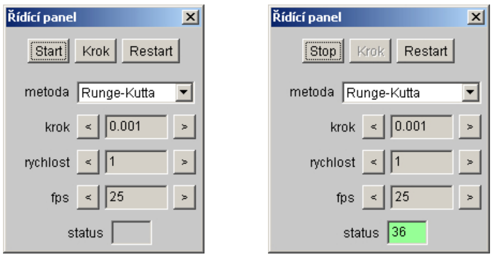
Prvnímu bodu ponecháme koeficient c_1 na hodnotě 1 $\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$. Druhému bodu nastavíme c_1 na hodnotu 0.00001 $\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$. S tak malou hodnotou útlumu bude sloužit pro ověření analytického řešení (2.3). Na třetí bod uplatníme výrazný odpor prostřední nastavením c_1 na hodnotu 0.1 $\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$ a c_2 na hodnotu 0.001 $\mathrm{N\,s^2\,m^{-2}}$. Parametry jsou shrnuty v tabulce 2.1.

index	c_1	c_2	v_{x0}	v_{y0}
0	1	0	0	0
1	0.00001	0	100	50
2	0.1	0.001	100	50

Tabulka 2.1: Parametry hmotných bodů

Výpočet úlohy se nastaví a spustí pomocí dialogu `Řídící panel` dostupného z menu `Simulace`, viz obr. 2.4. V řídícím panelu lze simulaci spustit, zastavit, krokovat a restartovat. Lze měnit metodu výpočtu, časový krok, rychlost simulace a počet zobrazovaných snímků. Je třeba si uvědomit, že výsledek výpočtu je přibližný, závislý na velikosti časového kroku a na použité numerické metodě. Nejspolehlivější je metoda *Runge-Kutta* a metoda zkráceně nazvaná *Symplektický Euler*.

V řídícím dialogu se rovněž znázorní rezerva výpočetního výkonu v poli `status`. Je-li pole zelené, počítač má k dispozici dostatek času k výpočtu. Naopak je-li růžové, počítač simulaci nestíhá[1]. Tento stav lze ovlivnit výběrem vhodné rychlosti simulace, množstvím zobrazených snímků (pole označené `fps`) a množstvím zobrazovaných objektů (viz dále). Nastavení v řídícím panelu rovněž ovlivňuje interval ukládání dat do stavových souborů (volba `uložení stavu` u každého objektu).



Obrázek 2.4: Řídící panel

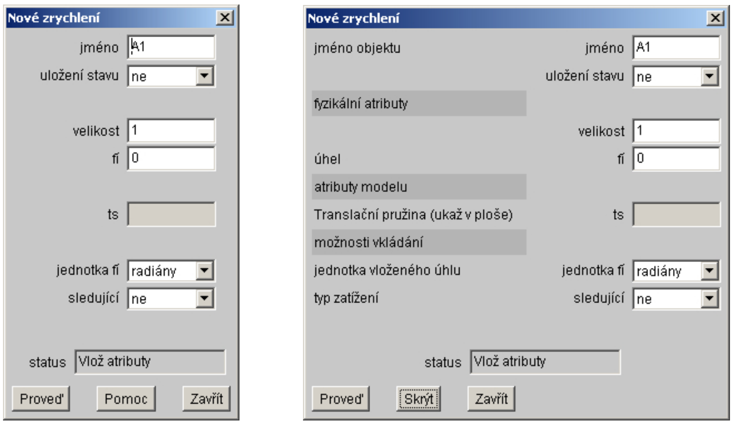
Vytvořené body se objeví na pracovní ploše vlevo dole. Po puštění simulace odletí rychle mimo rozsah zobrazení. Ke změně zobrazení použijte dialog `Panel zobrazení` dostupný z menu `Zobrazení`, viz obr. 2.5 nebo kolečko myši, které zvětšuje a zmenšuje zobrazení vzhledem k aktuální poloze kurzoru. S pomocí tlačítek v poli `zoom` roztáhněte pohled tak, aby bylo vidět body alespoň po dobu 10 sekund. Aktuální čas simulace je vidět ve stavovém řádku pod pracovní plochou. Můžete nechat simulaci běžet právě 10 sekund a poté stisknout tlačítko `Vše`.

Dalším krokem je vymodelování gravitačního zrychlení, které vytvoříme kliknutím na menu `Objekt - Nový - Zrychlení`. Tímto způsobem se vyvolá dialog `Nové zrychlení`, viz obr. 2.6. Zatíží se jím všechny hmotné body a hmotné styčníky. Má dva parametry: velikost a úhel. Úhel udává směr ve kterém model zrychluje, což je směr opačný, než kterým budou objekty padat. Je možno jej zadat ve stupních, grádech a radiánech.

Zadejte velikost 9.81 m/s^2, úhel 90 stupňů, potvrďte a zavřete dialog. Vlevo nahoře se

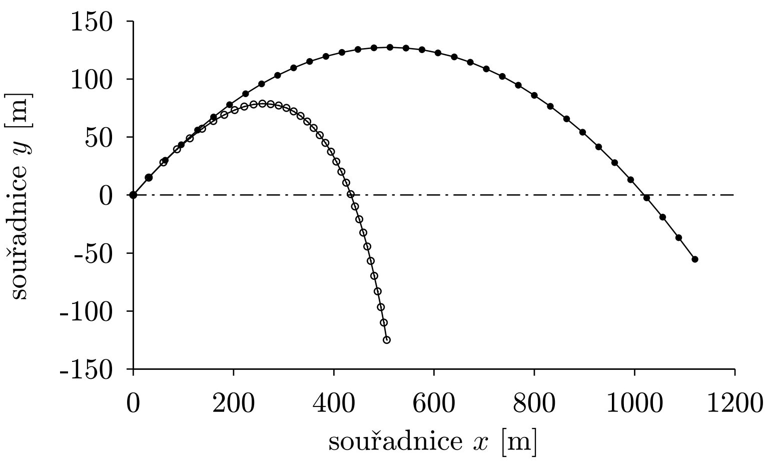
[1] Číslo zobrazené v poli `status` má význam doby v milisekundách, na kterou systém uspí výpočetní vlákno po každé skupině numerických kroků. Počet kroků ve skupině je dán výrazem `speed/(step`$\times$`fps)`.

Obrázek 2.5: Panel zobrazení



Obrázek 2.6: Dialog pro přidání zrychlení

objeví směrovka orientovaná vzhůru. Restartujte a spusťte simulaci. Na obr. 2.7 je znázorněn výsledek simulace.



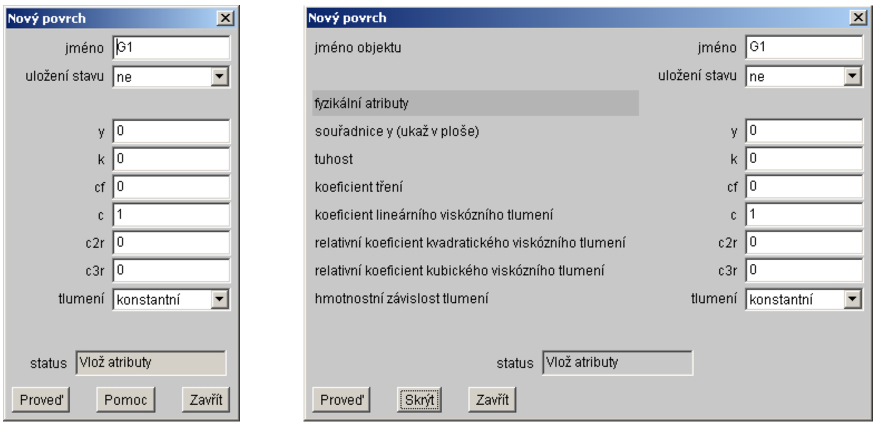
Obrázek 2.7: Balistická křivka

V případě vystřeleného bodu s velmi malým odporem je dostřel prakticky totožný s analytickým řešením: 1019.45 m při kroku $h = 0.001$ sekund metodou Runge-Kutta versus 1019.37 m analyticky. Bod s větším odporem dopadl ve vzdálenosti přibližně 434.4 metru.

Zobrazené křivky snadno získáte zvolením uložení stavu obou hmotných bodů. Nyní to lze provést následujícím způsobem: zastavte simulaci v čase různém od nuly. Vyberte blokem nebo jednotlivě s klávesou `Ctrl` oba vystřelené body a zvolte menu `Objekt - Změnit`. Objeví se dialog `Změnit hmotný bod`, kde můžete nastavit možnost uložení. Jakmile dialog potvrdíte vytvoří se na disku soubory, z nichž každý odpovídá jednomu bodu. Jak simulace poběží, budou se do nich zapisovat vypočtená data. V souboru se objeví například následující (výstup byl z důvodu zobrazení upraven):

```
ModelElement MP3 MassPoint
time coordX      coordY      velocityX    velocityY   accelerationX accelerationY resultantX resultantY
0.00 0           0           100          50          -21.18033989 -20.40016994 -21.18033989 -20.400169
0.32 30.95384004 14.98558067 93.57644309  43.75027265 -19.02397631 -18.70437687 -19.02397631 -18.704376
0.64 59.95698567 28.0538123  87.79163648  38.00391658 -17.17769406 -17.24601188 -17.17769406 -17.246011
0.96 87.19896862 39.35439732 82.55561287  32.69212147 -15.58592516 -15.98204501 -15.58592516 -15.982045
1.28 112.8431568 49.01705392 77.7941781    27.75830794 -14.20507461 -14.87861625 -14.20507461 -14.878616
1.60 137.0312436 57.15500266 73.44558097  23.15557852 -13.00055178 -13.90875303 -13.00055178 -13.908753
1.92 159.8868081 63.8677425  69.45799356  18.84479161 -11.9446227  -13.05072024 -11.9446227   -13.05072
2.24 181.5181686 69.24328674 65.78758209  14.79308877 -11.01483269 -12.28681086 -11.01483269 -12.286810
2.56 202.0206918 73.35998377 62.39701455  10.97275629 -10.19283121 -11.60244878 -10.19283121 -11.602448
2.88 221.4786795 76.28801548 59.25429587  7.36033589  -9.463484751 -10.9855169  -9.463484751 -10.985516
3.20 239.966924  78.09064225 56.33185162  3.935922684 -8.814198983 -10.42585062 -8.814198983 -10.425850
3.52 257.5520023 78.82524713 53.60580278  0.682604482 -8.234395334 -9.914854976 -8.234395334 -9.9148549
3.84 274.2933627 78.54421841 51.05538856 -2.413992097 -7.715103609 -9.445215799 -7.715103609 -9.4452157
4.16 290.2442461 77.29570041 48.66250475 -5.366075118 -7.248643722 -9.010683012 -7.248643722 -9.0106830
```

Simulaci můžeme ještě vylepšit přidáním povrchu, kam letící body dopadnou. Pružný povrch přidáme pomocí dialogu `Nový povrch` dostupného z menu `Objekt - Nový - Povrch`, viz obr. 2.8.



Obrázek 2.8: Dialog pro vytvoření povrchu

Povrch je určen svou polohou, tuhostí, koeficientem tření a koeficienty viskózního tlumení. Zvolíme polohu $y = 0$ metrů, tuhost 1000 N/m, koeficient tření 0.1 a koeficient útlumu c_1 =100 $\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$. Zbylé dva koeficienty ponecháme nulové. Po restartu simulace by mělo dojít k dopadu bodů na povrch, kde v důsledku tlumení povrchu uvíznou.

Tlumení je u povrchu realizováno nanesením další tlumící sílou působící obdobně jako u odporu prostředí. Síla se objeví jakmile bod propadne pod úroveň povrchu. Velikosti odporových sil lze předem jen obtížně odhadnout bez provedení experimentu. Z průběhu simulace však můžeme usoudit, zda zvolené hodnoty odpovídají naší představě.

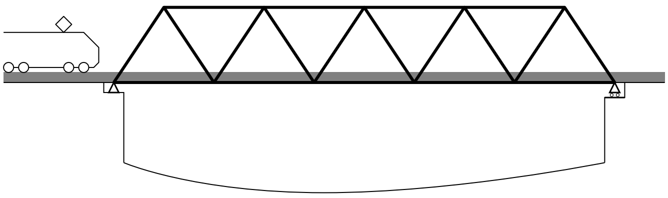
Na závěr zkuste experimentovat s nastavením odporu prostředí u obou bodů, popřípadě přidejte další body. Cílem může být odhalení, jak různé typy odporu zakřivují jejich trajektorie.

Kapitola 3

Kolaps příhradového mostu

V této kapitole vytvoříme model příhradového mostu a odhalíme, jakým způsobem bude reagovat na zatížení a poškození. Příhradové mosty jsou ekonomické v rozpětí zhruba 30 až 150 metrů, viz [7]. Skládají se z částí, jenž lze snadno vyrobit a dopravit na místo stavby. Smontování mostu z těchto částí je rovněž nenáročné.

Vymodelujeme staticky určitý ocelový příhradový most s dolní mostovkou o rozpětí 50 metrů a výšce hlavního nosníku 7.5 metru s devíti pravidelnými příhradami, viz obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Příhradový most

Úlohu si zjednodušíme volbou stejného průřezu pro všechny pruty. Průřez bude mít tvar čtverce (krabicový) o šířce 50 cm a tloušťce stěny 4 centimetry, což představuje plochu průřezu $A = 0.0564\ \mathrm{m}^2$ a moment setrvačnosti $I = 0.002085\ \mathrm{m}^4$. Vyčíslíme ještě normálovou tuhost průřezu $EA = 11.8$ GN a ohybovou tuhost $EI = 438\ \mathrm{MN\,m}^2$. Z ohybové tuhosti spočítáme maximální tlakovou sílu F_{cr}, kterou prut délky L přenese bez ztráty stability:

$$F_{cr} = EI\frac{\pi^2}{L^2}, \tag{3.1}$$

což pro prut délky 10 metrů dává hodnotu $F_{cr} = 43.2$ MN. Budeme uvažovat ocel o objemové hmotnosti $\rho = 7850\ \mathrm{kg/m}^3$ a pevnosti 235 MPa. Maximální síla, které můžeme dosáhnout, aniž bychom překročili tuto pevnost tak činí $F_{max} = 13.3$ MN.

Pro vymodelování prutů příhradového nosníku budeme potřebovat nový prvek, který se nazývá *translační pružina*. Translační pružina vypadá jako obyčejná pružina uzavřená do teleskopického pouzdra, viz obr. 3.2.

Každá translační pružina spojuje dva hmotné body. V translační pružině vzniká při deformaci síla F_{ij} působící na připojené hmotné body i a j ve směru teleskopického spoje.

Obrázek 3.2: Translační pružina

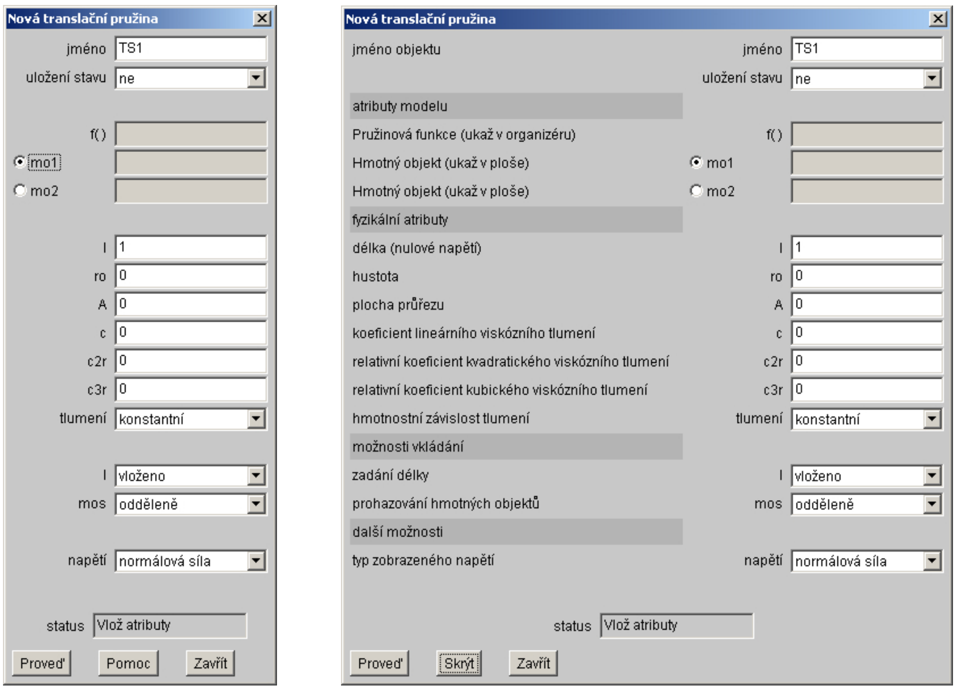
Velikost síly je dána výrazem:

$$F_{ij} = f(\Delta l_{ij}), \tag{3.2}$$

kde $f()$ je tzv. *pružinová funkce* a Δl_{ij} je prodloužení pružiny dané výrazem:

$$\Delta l_{ij} = l_{aij} - l_{0ij}, \tag{3.3}$$

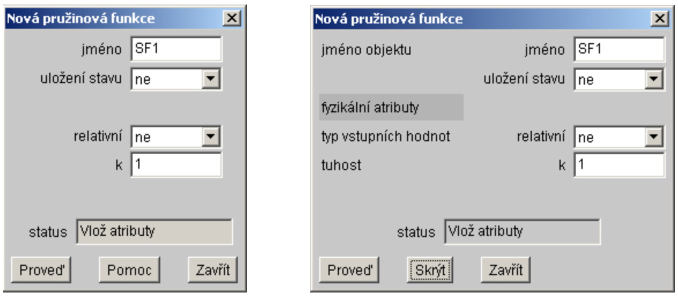
přičemž l_{aij} představuje aktuální délku pružiny a l_{0ij} je délka pružiny při nulovém protažení. Novou translační pružinu vytvoříme pomocí dialogu `Nová translační pružina`, který je dostupný z menu `Objekt - Nový - Translační pružina`, viz obr. 3.3.



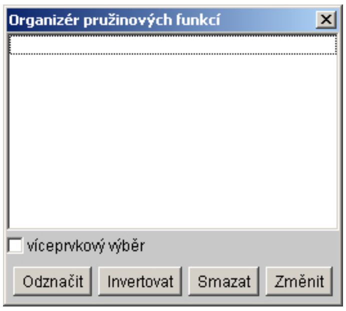
Obrázek 3.3: Dialog pro vytvoření translační pružiny

Vytvoření nové pružiny představuje zejména určení pružinové funkce a dvojice hmotných bodů. Obojí se znázorňuje v části nazvané `atributy modelu`. Pružinovou funkci je ale třeba nejdřív vytvořit. Děje se tak pomocí dialogu, jenž závisí na vybraném typu. Výběr uskutečníme v menu `Objekt - Nový - Pružinová funkce`. Pro účely modelování mostu použijeme lineární funkci, která se definuje v dialogu `Nová pružinová funkce`, viz obr. 3.4.

Abychom mohli pružinovou funkci vybrat, potřebujeme ještě další dialog, který se nazývá `Organizér pružinových funkcí`. Najdeme jej v menu `Zobrazení`, viz obr. 3.5. V tomto dialogu můžeme funkce vybírat, měnit a odstraňovat.



Obrázek 3.4: Dialog pro vytvoření lineární pružinové funkce



Obrázek 3.5: Organizér pružinových funkcí

V tuto chvíli je vhodné říci, že většina dialogů aplikace FyDiK je tzv. *nemodální*, což znamená, že mohou být otevřeny všechny společně. Záleží na uživateli, zda je ponechá viditelné.

3.1 Postup

Nejprve vytvoříme dvě řady hmotných bodů, jimž můžeme ponechat původní parametry. První řada bude tvořit spodní pás nosníku, druhá řada horní pás. Body na spodním pásu budou mít souřadnici $y_0 = 0$ m, body horního pásu souřadnici $y_0 = 7.5$ m.

Začneme levým spodním bodem, jenž umístíme do počátku souřadného systému, tj. na souřadnice $x_0 = 0$ m a $y_0 = 0$ m. Pokračujme změnou souřadnice x_0 přidáváním deseti metrů až do bodu se souřadnicí $x_0 = 50$ m.

Obdobně vytvoříme horní pás od bodu se souřadnicí $x_0 = 5$ m a $y_0 = 7.5$ m. Přidávat budeme opět 10 metrů až do bodu se souřadnicí $x_0 = 45$ m. Pro zobrazení celého mostu použijte opět dialog `Panel zobrazení`, který můžete ponechat stále viditelný ve vhodné části obrazovky.

Nyní vytvořte lineární pružinovou funkci pomocí volby `Objekt - Nový - Pružinová funkce - Lineární`. Pojmenujte ji `EA`. Zvolte možnost `relativní` na `ano` a zadejte tuhost $EA = 11.8$ GN, což učiníte nejsnadněji zápisem `11.8e9`. Volba `relativní` způsobí, že se zadané číslo v poli `tuhost` vydělí délkou prutu, čímž se získá jeho správná normálová tuhost, pro kterou platí výraz $k = EA/L$. Ponecháte-li volbu `relativní` na `ne` dosadí se zadané číslo přímo jako tuhost pružiny.

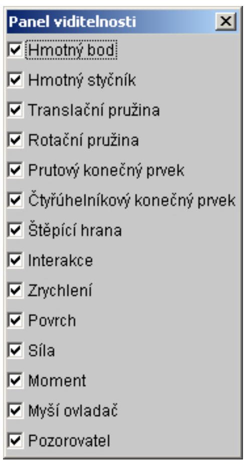
Otevřte dialog Nová translační pružina a zároveň Organizér pružinových funkcí. V organizéru klikněte na vytvořenou pružinovou funkci EA. Po kliknutí se v dialogu translační pružiny tato objeví v poli f().

Po úspěšném přiřazení pružinové funkce budeme označovat body, které je třeba spojit pruty. Dialog nám nabízí dva způsoby jak tento úkol provést. V části nazvané možnosti vkládání je k dipozici volba prohazování hmotných objektů. Buď budeme body označovat spojitě za sebou, použijeme volbu postupně. Nebo pro každou pružinu označíme vždy počáteční a koncový bod – volba odděleně. Přeruší-li se nám řetězec označování, pak můžeme překliknutím rádiových políček mo1 a mo2 vybrat, který bod zrovna označujeme.

Dalším vstupem je délka pružiny. Jsou zde tři možnosti jak ji zadat. Vybíráme opět v části možnosti vkládání, kde je pole označené l. První volba – vloženo – znamená, že je očekáváno číselné zadání délky ve stejnojmenném poli v horní části dialogu. Další dvě volby vypočítají délku z polohy označených bodů. Volba z počátečního stavu tak učiní z počátečních podmínek. Volba z aktuálního stavu vypočte délku z aktuálního stavu. S volbou z aktuálního stavu je třeba zacházet velmi obezřetně, jelikož se aktuální stav v průběhu výpočtu pochopitelně mění. Každá pružina si pamatuje, jakým způsobem byla její délka zadána. Proto při změně vlastností pružiny bude její délka opět vypočítána, což nemusí být na první pohled patrné.

Před zahájením označování ještě zadáme objemovou hmotnost 7850 $\mathrm{kg/m^3}$ v poli ro, plochu průřezu 0.0564 $\mathrm{m^2}$ v poli A, koeficient tlumení 100 $\mathrm{N\,s\,m^{-1}\,kg^{-1}}$ v poli c1 s volbou typu tlumení proporcionální. Tlumící síla u translační pružiny je dána výrazem (2.4), přičemž je za rychlost v dosazena vzájemná rychlost připojených hmotných bodů ve směru pružiny.

Vyberte si postup, kterému rozumíte a vytvořte všechny pružiny. Pokud jste zadali něco špatně, nebo pokud chcete zadání ověřit, je třeba vybrat translační pružiny a zvolit menu Objekt - Změnit. Výběr pružin je možno provést opět dvěma způsoby. Klikáním na ně s přidrženou klávesou Ctrl, nebo blokem či vícero bloky přidržením téže klávesy. Pomoci nám k tomu může dialog z menu Zobrazení jménem Panel viditelnosti, viz obr. 3.6.

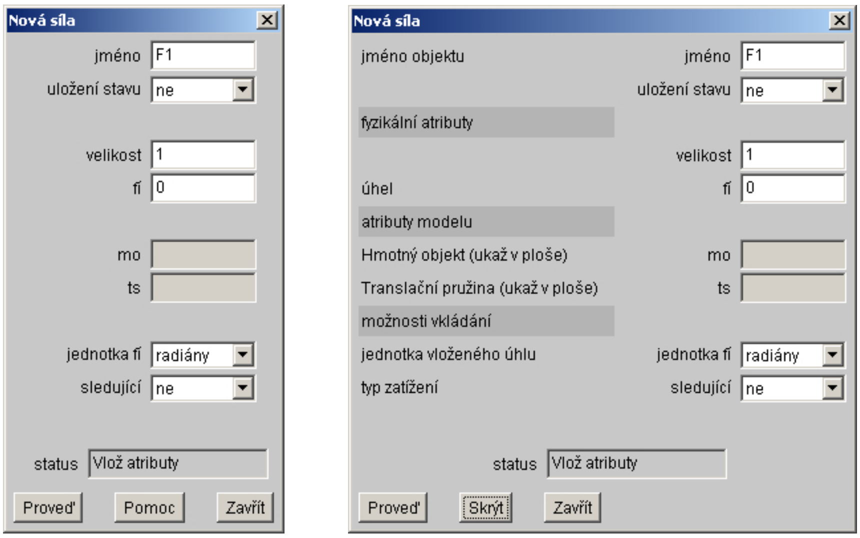


Obrázek 3.6: Panel viditelnosti

Odškrtnutím hmotných bodů v tomto dialogu můžeme vybrat blokem rovnou všechny translační pružiny.

Pokud chcete kterýkoliv objekt v pracovní rovině smazat, stačí jej označit a zvolit menu `Objekt - Smazat`. Vezměte na vědomí, že nepůjdou smazat ty objekty, na které je napojen jiný objekt neurčený ke smazání (tj. neoznačený). Pokud přesto takový výběr uděláte, objeví se informační hlášení `Závislé objekty nemohou být smazány`.

Posledním objektem bude zatížení. Na libovolný hmotný bod umístíme sílu velikosti ve stovkách tun. Provedeme to otevřením dialogu `Nová síla`, viz obr. 3.7, z menu `Objekt - Nový`.



Obrázek 3.7: Dialog pro vytvoření síly

V dialogu zvolíme velikost síly například 2 MN, které zapíšeme snadno jako `2e6`. Úhel 270 stupňů zadáme v poli `fí`, přičemž jednotky určíme volbou v políčku `jednotky fí` níže. Nakonec označíme vybraný hmotný bod.

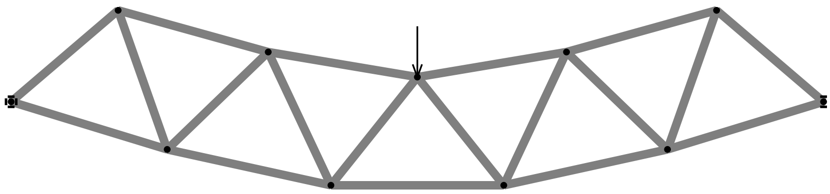
Síla i zrychlení mají dále volbu `sledující`, se kterou souvisí zadání translační pružiny. Sledující zatížení totiž mohou svůj úhel měnit v závislosti na úhlu vybrané translační pružiny. V tento okamžik tuto volbu můžete ignorovat.

Nyní již můžete výpočet spustit. Pokud jste nezadali okrajové podmínky (podpory), pak Vám konstrukce bude klesat, popř. se i otáčet. Chcete-li podpory zadat, označte postupně oba koncové body a volbou `fixovat x` a `fixovat y` zajistěte podepření mostu.

3.2 Panel barevných funkcí

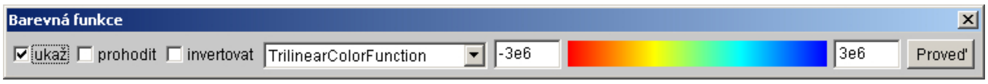
Pokud jste se přesně drželi návodu a měli jste před spuštěním výpočtu nanesené podpory, pak jste zřejmě rozčarováni. Zdánlivě se totiž nic neděje. Důvod je prostý. Nosník je velmi tuhý a zatížení dvěma stovkami tun je pro viditelné změny málo. Můžete tedy zkusit zatížení zvedat změnou velikosti síly. Příklad deformace od síly 500 MN je vidět na obrázku 3.8.

Rozumnější způsob jak si změny zobrazit skýtá možnost obarvit objekty podle jejich napjatosti. V menu `Zobrazení` je k dispozici `Panel barevných funkcí`, viz obr. 3.9. V



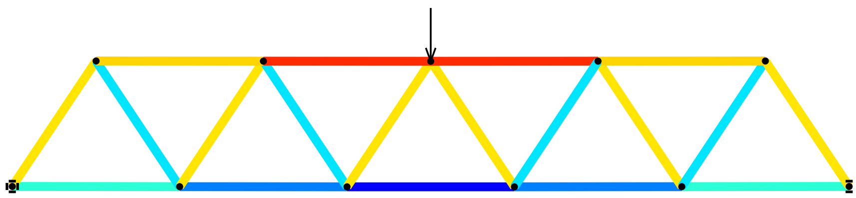
Obrázek 3.8: Deformace mostu při přetížení silou 500 MN

tomto panelu můžete volit různé barevné funkce a především nastavovat rozsah, který bude barevná funkce pokrývat. Pro sílu 2 MN umístěnou na hmotný bod uprostřed rozpětí je vhodný rosah `-3e6` až `3e6`, viz obr. 3.10.



Obrázek 3.9: Panel barevných funkcí

Barevné funkce je možné invertovat, popř. lze prohodit strany odpovídající kladným či záporným hodnotám. V nabídce barevných funkcí jsou dvě funkce speciální. Stupnice označená `Sextilinear` má černý střed kterým splývá s pozadím. Užije se ke znázornění veličiny mající kladné i záporné hodnoty. Stupnice `FullSurface` se zase hodí k odhalení i těch nejmenších změn.

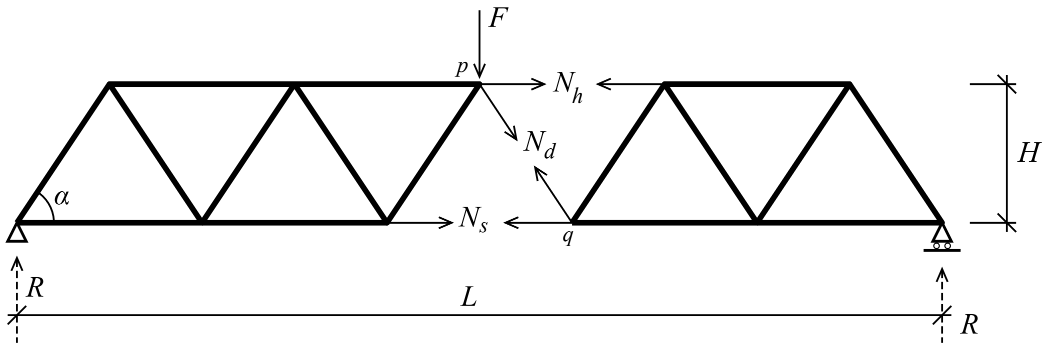


Obrázek 3.10: Barevně znázorněné normálové síly na prutech při zatížení silou 2 MN. Barvám odpovídá stupnice na obrázku 3.9. Žlutá až červená znamená tlak, azurová až modrá znamená tah.

Ověřme si analytickým výpočtem, zda jsou výsledky správně. Užijme tzv. *průsečnou metodu* ke stanovení trojice vnitřních normálových sil. Řezem skrze konstrukci vytvoříme dvě samostatné části, viz obr. 3.11.

Nejprve spočítáme vnější reakce R. Jelikož je zatěžující síla F uprostřed nosníku, platí výraz $R = F/2$. Pro $F = 2$ MN je tedy $R = 1$ MN.

Nyní napíšeme momentovou podmínku rovnováhy k působišti zatěžující síly p pro levou



Obrázek 3.11: Rozdělení nosníku průsečnou metodou

stranu rozděleného nosníku:

$$\sum M_{ip} = 0: \; R\,\frac{L}{2} - N_s\,H = 0, \tag{3.4}$$

kde $L = 50$ m je délka nosníku a $H = 7.5$ m je výška nosníku. Dosazením a upravením dostáváme:

$$N_s = \frac{F}{4}\,\frac{L}{H} = 3.\overline{3}\ \mathrm{MN}. \tag{3.5}$$

Obdobně z momentové podmínky k bodu q zapsané pro pravou stranu nosníku získáme:

$$N_h = -\frac{F}{5}\,\frac{L}{H} = -2.\overline{6}\ \mathrm{MN}. \tag{3.6}$$

Sílu v diagonálním prutu odvodíme například ze silové podmínky rovnováhy ve vodorovném směru pro levou stranu nosníku, přičemž musíme vzít do úvahy úhel diagonály označený α (viz obr. 3.11):

$$\sum F_i = 0: N_h + N_s + N_d\,\cos\alpha = 0. \tag{3.7}$$

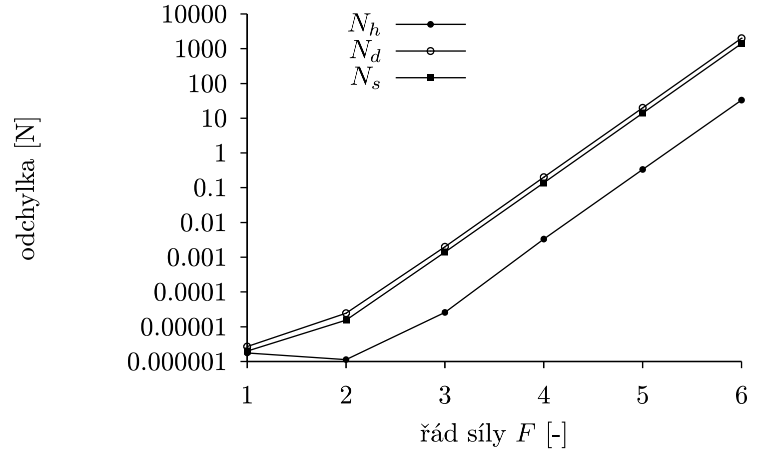
Rozepsáním dostáváme:

$$N_d = -\frac{F}{20}\sqrt{\frac{L^2}{H^2} + 100} = -1.20185\ \mathrm{MN}. \tag{3.8}$$

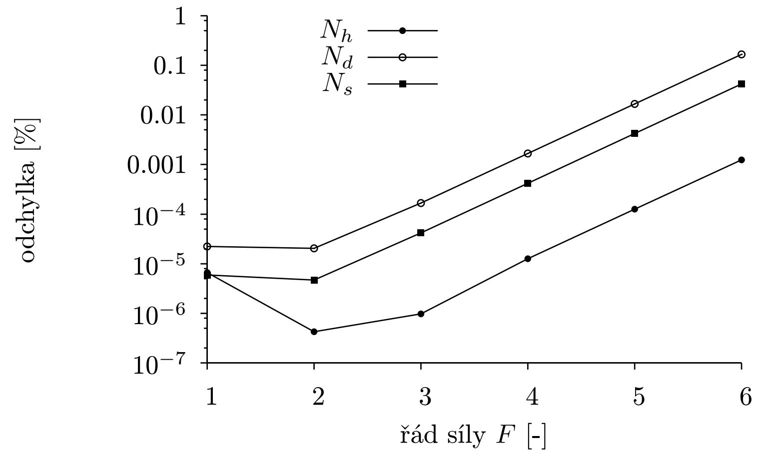
Uložením stavu odpovídajících translačních pružin zjistíme, že nám aplikace FyDiK dává výsledné síly trochu odlišných velikostí: $N_h = -2.66670$ MN, $N_d = -1.20385$ MN a $N_s = 3.33473$ MN. Snadno ověříme, že se jedná o vliv nelineárního řešení. Stačí výrazně snižovat řád zatěžující síly a ihned vidíme, že se numericky vypočítané hodnoty blíží k hodnotám stanoveným průsečnou metodou.

Na obrázku 3.12 a 3.13 jsou zobrazeny logaritmické grafy průběhu odchylek numerického řešení v závislosti na řádu zatěžující síly F. Z grafů je patrné přibližování k lineárnímu analytickému řešení (pokles odchylky), které při řádu 2 (stovky newtonů) přestává být exponenciální[1]. U menších řádů zřejmě vstupují do hry zaokrouhlovací chyby. Největší absolutní i relativní odchylku má přitom normálová síla na diagonále N_d.

[1]Exponenciální závislost se v logaritmickém gravu zobrazí jako přímka.



Obrázek 3.12: Absolutní odchylka numerického řešení v logaritmickém měřítku



Obrázek 3.13: Procentuální odchylka numerického řešení v logaritmickém měřítku

3.3 Kolaps

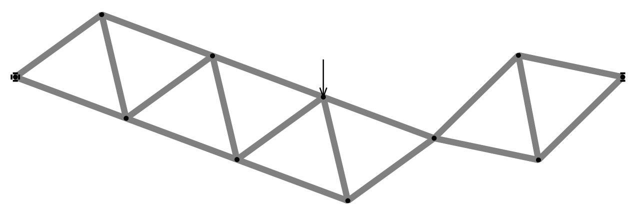
V předcházející části jsme si ukázali, jak znázornit velikosti vnitřní síly na nosníku pomocí barevné funkce. Vidíme tedy, že horní pás je tlačený a spodní pás tažený. Diagonály jsou tlačené pokud stoupají ke středu nosníku a naopak.

Jestli bude určitý prut tlačen či tažen můžeme odhalit také tak, že si představíme, jak by se nosník pohyboval, kdybychom daný prut odstranili. Jelikož je náš nosník staticky určitý, povede odstranění prutu k jeho kolapsu.

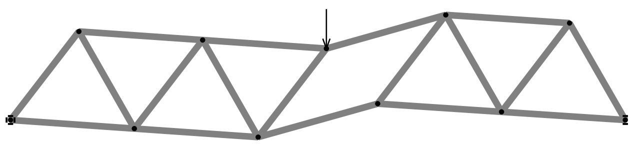
Chcete-li kolaps vyzkoušet, uložte nejprve úlohu pomocí menu `Soubor - Uložit`. Jakmile máte nosník uložen, můžete po smazání jeho částí provést obnovu načtením uloženého souboru.

Nyní vyberte některou z translačních pružin a zvolte menu `Objekt - Smazat`. Pokud simulace neběží, tak ji spusťe. Mazání objektů můžete provádět i za běhu. Kolabuje-li nosník příliš rychle, snižte v dialogu `Řídící panel` rychlost simulace.

Dva snímky průběhu kolapsu jsou k dispozici na obrázcích 3.14 a 3.15. První z nich byl vyvolán odstraněním prutu ze spodního pásu a druhý vznikl v důsledku smazání diagonály. V obou případech je patrné, jakým způsobem odstraněný prut působil. První působil tahem, druhý tlakem.



Obrázek 3.14: Kolaps vyvolaný porušením spodního pásu

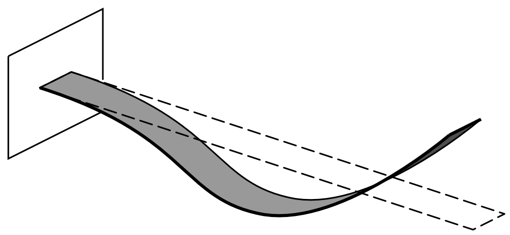


Obrázek 3.15: Kolaps vyvolaný porušením diagonály

Kapitola 4

Kmitání konzoly

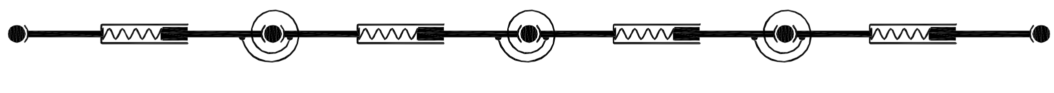
Ve třetí úloze se naučíme používat *rotační pružiny*, navržené pro modelování štíhlého prutu. Vybereme konzolový nosník délky jeden metr tvořený tenkým plátem pružné oceli, odpovídající například řeznému listu dřevorubecké pily, viz obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Štíhlý konzolový nosník

Takový pás výborně odpovídá účelu, kvůli kterému byl model prutu FyDiK vyvinut. Je především velmi štíhlý, což nám umožní zřetelně testovat velké deformace, aniž by došlo k poškození materiálu. Budeme na něm sledovat i jeho kmitání, které například u mostní konstrukce není pohledem patrné. Zvolíme plát o tloušťce 0.5 mm, šířce průřezu 4 cm, modulu pružnosti 210 GPa a objemové hmotnosti 7850 kg/m^3. Tyto parametry nám dávají celkovou hmotnost 157 gramů, normálovou tuhost $EA = 4.2$ MN a ohybovou tuhost $EI = 0.0875\ \mathrm{N\,m}^2$.

FyDiKovský model prutu bude složen z hmotných bodů, translačních pružin a rotačních pružin, viz obr. 4.2.



Obrázek 4.2: FyDiK model prutu

Rotační pružinu sil lze představit jako svinutý pásek pružné oceli, který se používá k pohonu mechanických hodin. Tato pružina spojuje dvě translační pružiny a zajišťuje mezi nimi silovou interakci podle výrazu:

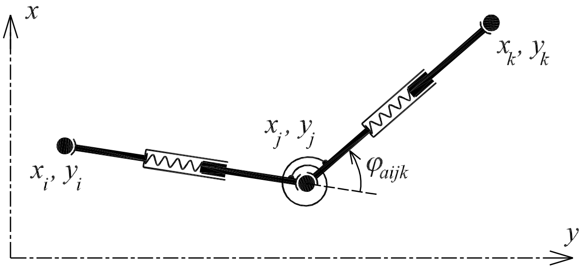
$$M_{ijk} = f(\Delta\varphi_{ijk}), \tag{4.1}$$

kde M_{ijk} je moment, kterým rotační pružina působí na připojené translační pružiny, $f()$ je vybraná pružinová funkce a $\Delta\varphi_{ijk}$ je pootočení rotační pružiny dané výrazem:

$$\Delta\varphi_{ijk} = \varphi_{aijk} - \varphi_{0ijk}, \tag{4.2}$$

přičemž φ_{aijk} představuje aktuální úhel mezi translačními pružinami, viz obr. 4.3. Úhel φ_{0ijk} svírají translační pružiny při nulové napjatosti rotační pružiny. Aktuální úhel pružiny φ_{aijk} stanovíme z rozdílu úhlů připojených translačních pružin:

$$\varphi_{aijk} = \varphi_{ajk} - \varphi_{aij}. \tag{4.3}$$

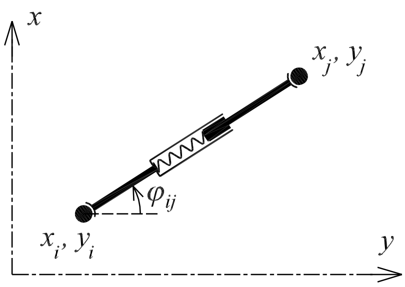


Obrázek 4.3: Rotační pružina

Zde je třeba zdůraznit, že každá translační pružina ij má v paměti svůj úhel φ_{aij}, který udržuje tak, aby mohl neomezeně růst a klesat i při přechodu do záporných hodnot nebo překročení úhlu 2π. Děje se tak prostřednictvím celočíselného čítače $c_{\varphi ij}$:

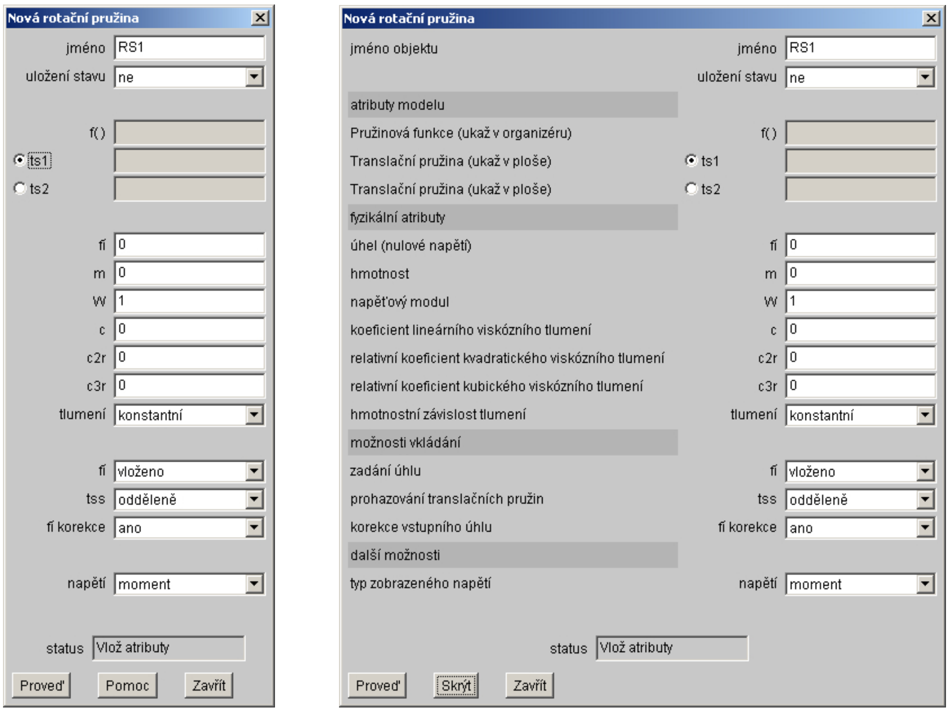
$$\sin\varphi_{sij} = \frac{y_j - y_i}{l_{aij}}, \;\; \varphi_{aij} = \varphi_{sij} + 2\pi c_{\varphi ij}, \tag{4.4}$$

kde φ_{sij} je aktuální úhel translační pružiny z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Čítač translační pružiny je tedy její (skrytou) stavovou proměnnou.



Obrázek 4.4: Translační pružina a její úhel

Novou rotační pružinu vytvoříme pomocí dialogu `Nová rotační pružina`, který je dostupný z menu `Objekt - Nový - Rotační pružina`, viz obr. 4.5.



Obrázek 4.5: Dialog pro vytvoření rotační pružiny

Zadání rotační pružiny je analogické zadání translační pružiny s tím, že se označují dvojice translačních pružin. Novinkou je u rotační pružiny volba `korekce vstupního úhlu`, která zajišťuje uživatelsky přirozené zadání. Je-li totiž zvolena možnost `ne`, může mít aktuální úhel rotační pružiny neodhadnutelnou velikost v důsledku hodnot v okolí mezních úhlů, popřípadě kvůli neznalosti hodnot čítačů translačních pružin.

Rotační pružině je možné nastavit hmotnost `m`, modul pro výpočet napětí v krajních vláknech průřezu `W` a koeficienty rotačního tlumení. Význam koeficientů nejlépe objasní výraz pro tlumící moment M_d daný výrazem:

$$M_d(\omega) = -c_1\,\omega - c_2\,|\omega|\,\omega - c_3\,\omega^3, \tag{4.5}$$

kde ω je vzájemná úhlová rychlost translačních pružin.

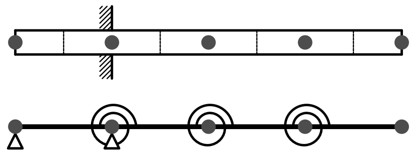
4.1 Postup

Konzolový nosník si rozdělíme na deset stejně dlouhých dílků. Vytvoříme nejprve dvanáct hmotných bodů počínaje souřadnicí $x_0 = -L/10 = -0.1$ m, $y_0 = 0$ m ($L = 1$ m je délka konzoly). První bod bude totiž tvořit vetknutí. Každý následující bod je oproti předchozímu posunutý o $1/10L$. Hmotnost u všech nastavíme na nulu. Body totiž získají hmotnost od translačních pružin. Koeficient c_1 nastavíme na hodnotu 0.001 $\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$ (tj. tlumení ponecháme `konstantní`). Posledním bude bod se souřadnicí $x = L = 1$ m.

Dalším krokem je vytvoření tří lineárních pružinových funkcí. První – pro translační pružiny – nazveme `EA` a nastavíme její tuhost na hodnotu `4.2e6` s volbou `relativní` na `ano`.

Druhou – pro rotační pružiny – nazveme `EI` a nastavíme na hodnotu 0.0875 Nm^2 rovněž s volbou `relativní`. A nakonec třetí pro rotační pružinu u vetknutí. Nazveme ji třeba `2EI` a nastavíme na hodnotu dvojnásobku ohybové tuhosti EI, což odpovídá hondotě 0.175 Nm^2.

Vysvětlení, proč je u vetknutí tuhost dvonásobná není úplně jednoduché. Mohli bychom se tomu vyhnout, ale vlastnosti modelu by tak rychle nekonvergovaly ke správnému řešení. Problém spočívá v deformační délce prutu, která přísluší dané rotační pružině. Pružina u vetknutí má totiž poloviční deformační délku oproti běžným pružinám. Druhá polovina příslušné délky je vetknuta a deformace se neúčastní, viz obr. 4.6. Ze schématu je rovněž patrný způsob podepření a rozdělení hmotnosti prutu. Koncové body budou mít pouze poloviční hmotnost, což představuje obdobné dilema jako změna tuhosti pružiny.



Obrázek 4.6: Příslušnost úseků prutu k objektům modelu

Pokud jste tak již neučinili, naneste okrajové podmínky na první dva hmotné body (fixace ve směru x i y). Dále vytvořte translační pružiny s pružinovou funkcí `EA` spojující vzájemně všechny sousedící body. Jejich délku nastavte na 0.1 metr nebo zvolte možnost `z počátečního stavu`. Plochu `A` zadejte `2e-5`, objemovou hmotnost 7850 kg/m^3.

Vytvořte první rotační pružinu s pružinovou funkcí `2EI` spojující první dvě translační pružiny a dále rotační pružiny s pružinovou funkcí `EI` mezi zbylými vzájemně sousedícími translačními pružinami. Jejich úhel ponechejte na nule. Chcete-li v budoucnu obarvit rotační pružiny podle napětí v krajních vláknech, zadejte do pole modulu `W` hodnotu `1.6667e-9` (podíl momentu setrvačnosti I a poloviny výšky průřezu).

4.2 Numerická nestabilita

Model je hotov, můžeme spustit simulaci. Po spuštění vidíme, že výpočet neprobíhá tak, jak má. Došlo k *numerické nestabilitě*. Hodnoty všech stavových proměnných neomezeně narostly, což se projevilo nemožností korektně vykreslit stav nosníku[1].

Důvodem, proč došlo k nestabilitě souvisí s numerickou metodou, velikostí kroku metody h a vlastnostmi nosníku. Nosník je totiž velmi tuhý v normálovém směru. Maximální numerický krok h_{max}, při kterém je výpočet stabilní, závisí na maximální frekvenci kmitání f_{max}. Platí tzv. *vzorkovací teorém*, viz např. [5], ze kterého vyplývá:

$$h_{max} \leq \frac{1}{2\, f_{max}}. \tag{4.6}$$

Maximální frekvence u našeho modelu je frekvencí kmitání hmotného bodu na volném konci konzoly f_e. Pro tuto frekvenci platí:

$$f_e \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EA}{l_e\, m_e}}, \tag{4.7}$$

[1]Ve stavový souborech se překročení číselné meze projeví zápisem `NaN`, který znamená *Not a Number* (česky není číslo).

kde $l_e = L/10$ je délka translační pružiny a $m_e = m/20$ je hmotnost hmotného bodu na konci konzoly. Vztah lze dále rozepsat:

$$f_e \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200\,EA}{L\,m}} = 11.6\,\mathrm{kHz}. \tag{4.8}$$

Dle vzorkovacího teorému tedy získáváme $h_{max} \leq 4.29 \cdot 10^{-5}$ s. Ve skutečnosti potřebujeme ještě nižší krok, a to $h = 1.56 \cdot 10^{-5}$ sekundy pro metodu `Runge-Kutta` i symplektickou Eulerovu metodu (`Symplektický Euler`).

Nastavte metodu `Symplektický Euler` a krok `1.56e-5`. Restartujte a případně spusťte simulaci. Zvolte rychlost simulace tak, aby Váš procesor výpočet zvládal.

Literatura

[1] Wikipedia, the free encyclopedia: Dynamical system, http://en.wikipedia.org

[2] Wikipedia, the free encyclopedia: JAR (file format), http://en.wikipedia.org

[3] Wikipedia, the free encyclopedia: Lagrangian, http://en.wikipedia.org

[4] Wikipedia, the free encyclopedia: Lagrangian, http://en.wikipedia.org

[5] Wikipedia, the free encyclopedia: Nyquist–Shannon sampling theorem, http://en.wikipedia.org

[6] Macur, J.: Dynamické systémy, http://www.fce.vutbr.cz/studium/materialy/Dynsys

[7] University of Ljubljana: ESDEP Course, http://www.fgg.uni-lj.si/kmk/esdep/master/wg15b/l0500.htm

Přílohy

Příloha A: Pojmy

Dynamický systém
je formální název pro souhrn pravidel časové změny polohy bodu ve stavovém prostoru systému. V aplikaci FyDiK tato pravidla ve většině případů odpovídají druhému Newtonovu zákonu síly.

Nelineární chování
znamená, že změna počátečních podmínek není úměrná změně řešení systému. Obecně existují typické nelineární jevy jako skoky, bifurkace, deterministický chaos.

Okrajové podmínky
jsou podmínky, obvykle nezávislé na čase, kladené na hodnoty stavových proměnných systému, které musí řešení dynamického systému splňovat.

Počáteční podmínky
jsou podmínky, kladené na hodnoty stavových proměnných systému, které musí řešení dynamického systému splňovat v daném časovém okamžiku. Konkrétně v aplikaci FyDiK v čase nula.

Simulace
slouží pro zjištění jak se bude vyvíjet dynamický systém v čase z určitých počátečních podmínek.

Stavové proměnné
jsou čísla popisující aktuální stav systému v určitém čase. Stav systému je jimi bezezbytku určen. Tyto proměnné odpovídají souřadnicím ve stavovém prostoru systému. V aplikaci FyDiK se především jedná o polohové souřadnice a aktuální rychlosti všech hmotných bodů.

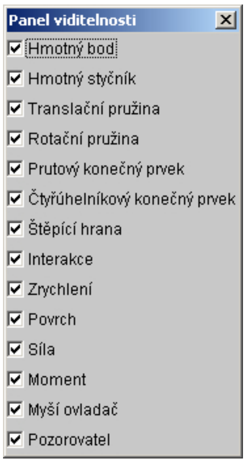
Stavový prostor
je myšlený prostor v němž každý bod odpovídá jedinečnému stavu systému. Jeho souřadnice jsou stavové proměnné systému. Dimenze prostoru je tedy rovna počtu stavových proměnných. Vyvíjející se systém tvoří ve stavovém prostoru spojitou trajektorii.

Trajektorie systému
je zobrazení řešení dynamického systému v jeho stavovém prostoru. Je to spojitá křivka, která reprezentuje vývoj systému v čase. Trajektorie se nemůže v žádném bodě křížit z důvodu jednoznačnosti vývoje.

Příloha B: Dialogy

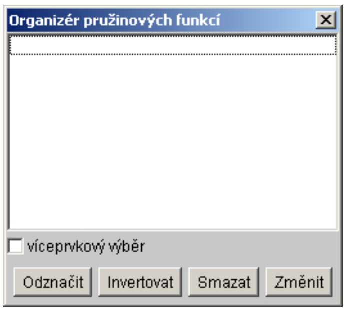
Zde jsou pohromadě zobrazeny všechny použité dialogy, uspořádány podle jejich výskytu v menu aplikace.

Obrázek 5.7: Panel zobrazení

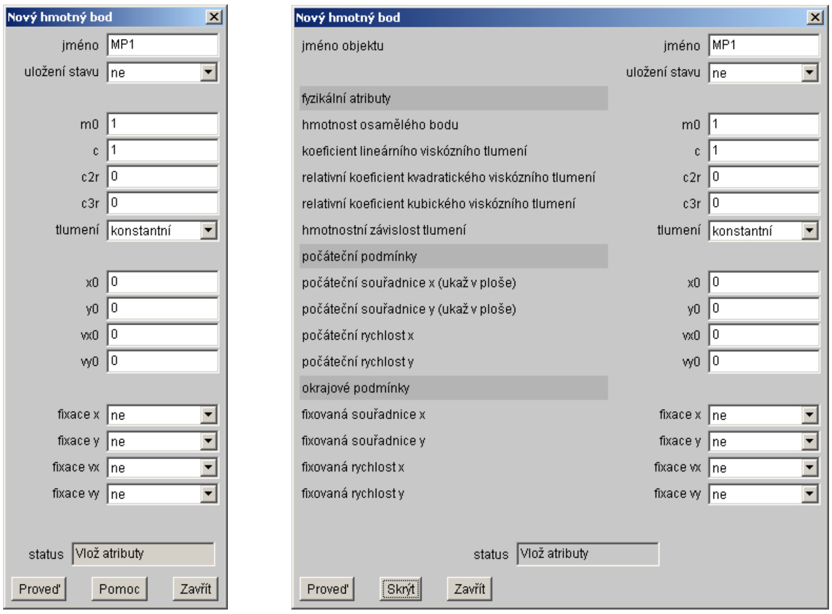


Obrázek 5.8: Panel viditelnosti

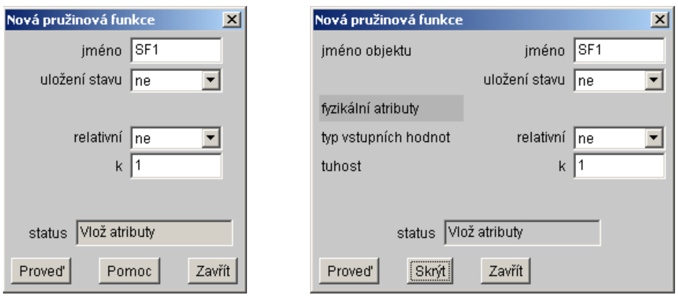
Obrázek 5.9: Panel barevných funkcí



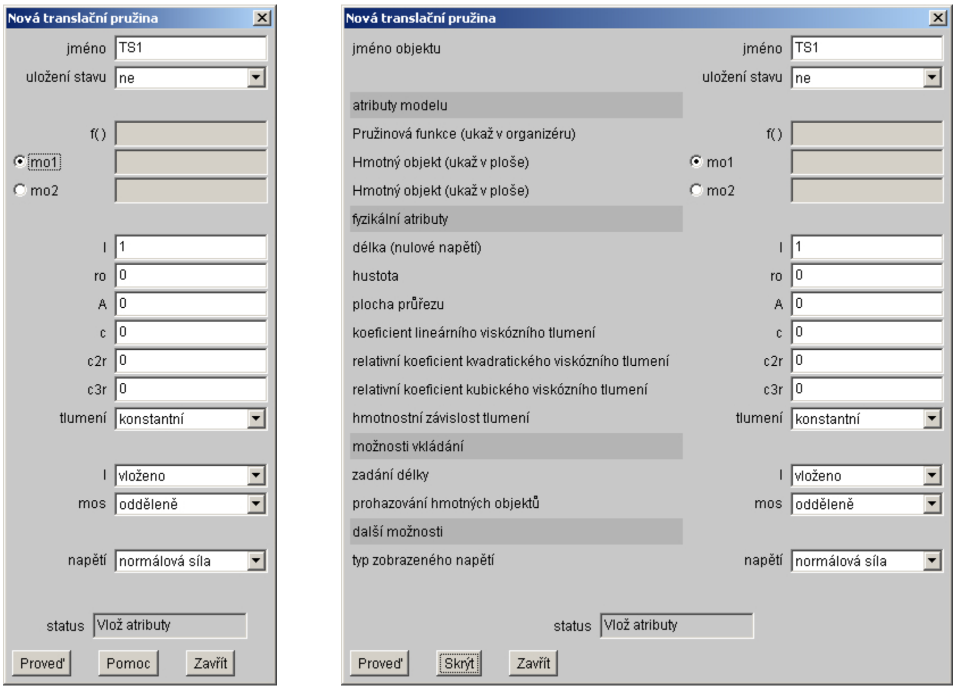
Obrázek 5.10: Dialog pro vytvoření lineární pružinové funkce



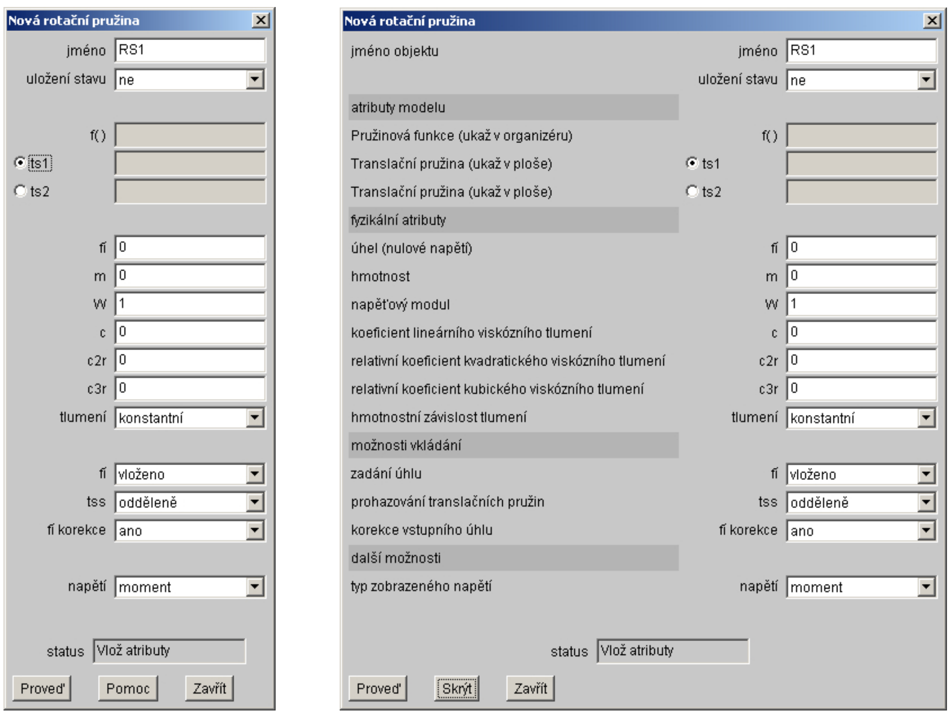
Obrázek 5.11: Dialog pro vytvoření hmotného bodu



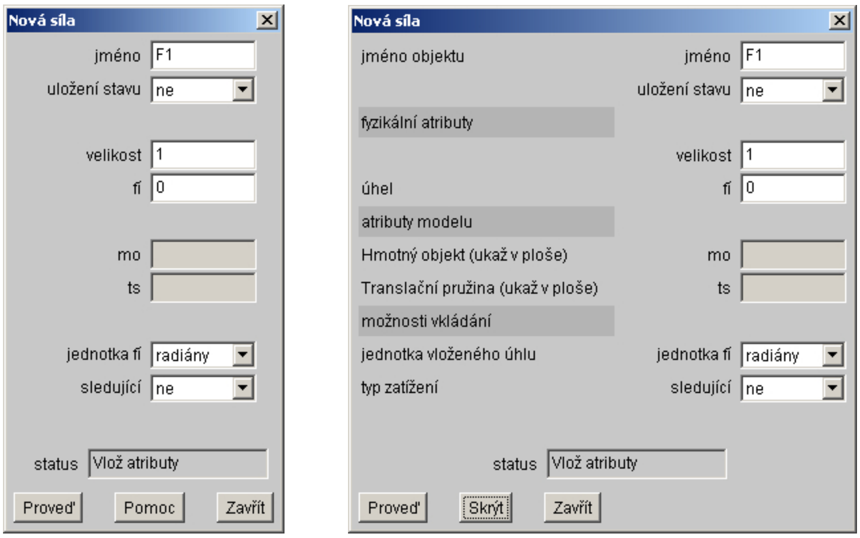
Obrázek 5.12: Dialog pro vytvoření lineární pružinové funkce



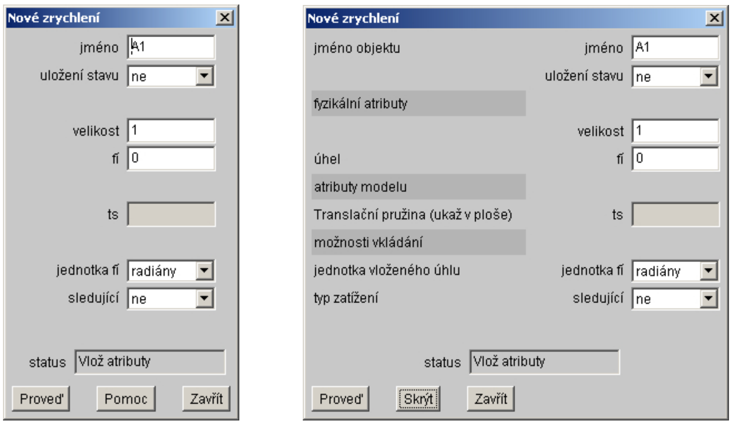
Obrázek 5.13: Dialog pro vytvoření translační pružiny



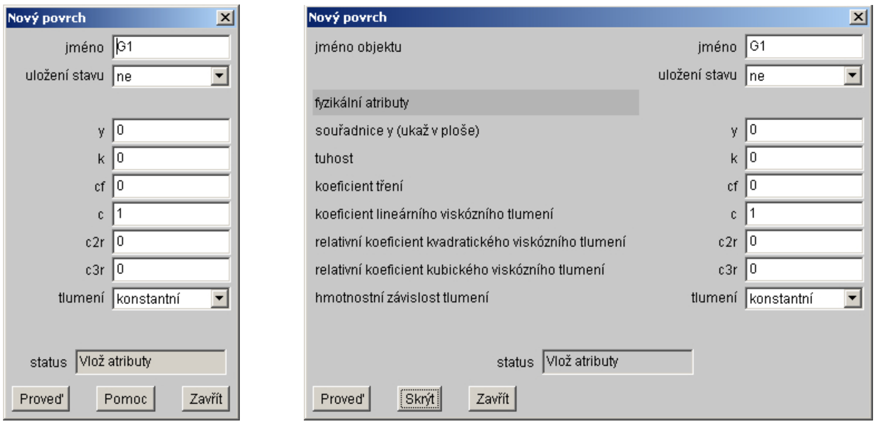
Obrázek 5.14: Dialog pro vytvoření rotační pružiny



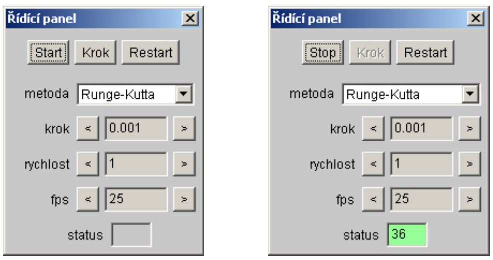
Obrázek 5.15: Dialog pro vytvoření síly



Obrázek 5.16: Dialog pro přidání zrychlení



Obrázek 5.17: Dialog pro vytvoření povrchu

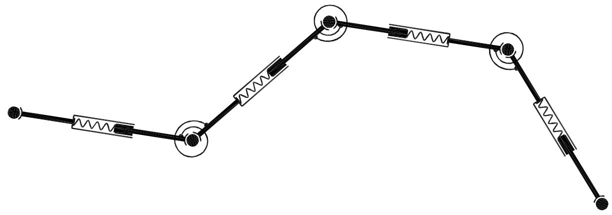


Obrázek 5.18: Řídící panel

Příloha C: Odvození modelu prutu FyDiK

Úkážeme si zde odvození pohybových rovnic rovinného modelu prutu FyDiK. Odvození provedeme sestavením závislosti celkové energie modelu E na poloze a rychlosti jeho hmotných bodů. Model se skládá z hmotných bodů, translačních pružin a rotačních pružin, viz obr. 5.19. Uvažujeme, že se veškerá hmota sousředí do hmotných bodů, čímž zanedbáme setrvačné vlastnosti translačních a rotačních pružin.

Fyzikální model prutu FyDiK (složený z reálných kuliček a pružin) díky své struktuře zanedbává rovněž smykovou složku přetvoření prutu.



Obrázek 5.19: FyDiK model rovinného prutu

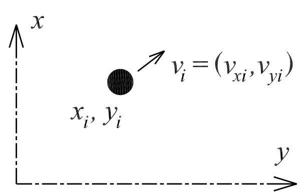
5.5.1 Hmotný bod

Celkovou energii modelu sestavíme po jednotlivých součástech. Začneme hmotnými body, viz obr. 5.20. Hmotný bod s indexem i, hmotností m_i pohybující se rychlostí $\vec{v_i}$ má kinetickou energii E_{ki}, pro kterou platí:

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\, m_i\, |\vec{v_i}|^2, \tag{5.9}$$

což je možno rozepsat pomocí složek vektoru rychlosti v_{xi}, v_{yi} do tvaru:

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\, m_i\, (v_{xi}^2 + v_{yi}^2). \tag{5.10}$$



Obrázek 5.20: Hmotný bod

Celková kinetická energie E_k modelu je potom součtem kinetických energií všech jeho hmotných bodů $E_k = \sum E_{ki}$. Jelikož v tomto odvození neuvažujeme odpor prostředí či jiné formy útlumu ani působení gravitace, tak k potenciální energii modelu E_p nebudou hmotné body přispívat.

5.5.2 Translační pružina

Translační pružina spojuje dva hmotné body a nahrazuje v modelu normálovou tuhost prutu. Budeme-li uvažovat lineární chování materiálu prutu, pak můžeme pro normálovou sílu v prutu rovnou normálové síle F_{ij} v pružině psát vztah:

$$F_{ij} = k_{ij}\,\Delta l_{ij}, \tag{5.11}$$

kde k_{ij} je tuhost pružiny a Δl_{ij} je prodloužení pružiny pro které platí:

$$\Delta l_{ij} = l_{aij} - l_{0ij}, \tag{5.12}$$

přičemž l_{aij} představuje aktuální délku pružiny a l_{0ij} je délka pružiny při nulovém protažení. Aktuální délku pružiny l_{aij} spočítáme přesně výrazem:

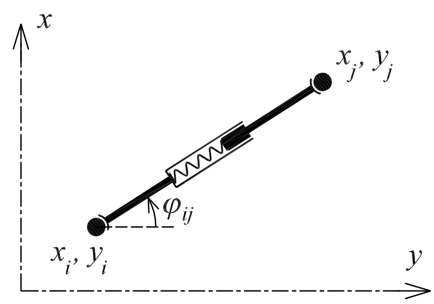
$$l_{aij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \tag{5.13}$$

kde x_i, y_i jsou aktuální souřadnice hmotného bodu s indexem i. Translační pružina akumuluje potenciální energii E_{pij} pro kterou platí:

$$E_{pij} = \frac{1}{2}\,k_{ij}\,\Delta l_{ij}^2. \tag{5.14}$$

Potenciální energie modelu E_p je potom navýšena o součet potenciálních energií všech translačních pružin. Pro účely stanovení stavu rotační pružiny označme aktuální úhel translační pružiny φ_{aij}, viz obr. 5.21, pro který platí:

$$\varphi_{aij} = \arctan\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}. \tag{5.15}$$



Obrázek 5.21: Translační pružina

5.5.3 Rotační pružina

Pro zajištění ohybové tuhosti modelu prutu je na každém vnitřním hmotném bodě připojena rotační pružina ke dvojici translačních pružin v teleskopickém pouzdře. Opět za předpokladu lineárního působení bude pro moment M_{ijk}, kterým pružina působí, platit výraz:

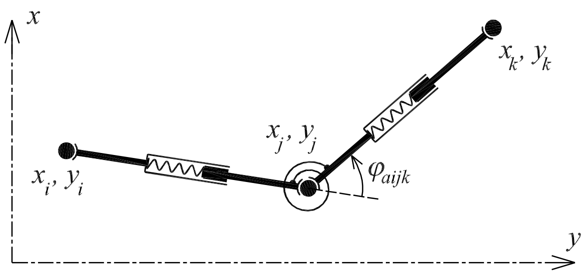
$$M_{ijk} = k_{ijk}\,\Delta\varphi_{ijk}, \tag{5.16}$$

kde k_{ijk} je tuhost pružiny a $\Delta\varphi_{ijk}$ je aktuální pootočení pružiny pro které platí:

$$\Delta\varphi_{ijk} = \varphi_{aijk} - \varphi_{0ijk}, \tag{5.17}$$

přičemž φ_{aijk} představuje aktuální úhel mezi translačními pružinami a φ_{0ijk} je úhel mezi translačními pružinami při nulové napjatosti rotační pružiny. Aktuální úhel pružiny φ_{aijk} stanovíme z rozdílu úhlů připojených translačních pružin, viz obr. 5.22:

$$\varphi_{aijk} = \varphi_{ajk} - \varphi_{aij}. \tag{5.18}$$



Obrázek 5.22: Rotační pružina

Rotační pružina akumuluje potenciální energii E_{pijk} pro kterou platí:

$$E_{pijk} = \frac{1}{2}\,k_{ijk}\,\Delta\varphi_{ijk}^2. \tag{5.19}$$

Stejně jako u translačních pružin je potenciální energie modelu E_p navýšena o součet potenciálních energií všech rotačních pružin.

5.5.4 Celková energie

Seskupením odvozených výrazů (5.9), (5.14) a (5.19) pro celkovou energii modelu E platí výraz:

$$E = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,(v_{xi}^2 + v_{yi}^2) + \sum_{(ij)} \frac{1}{2}\,k_{ij}\,\Delta l_{ij}^2 + \sum_{(ijk)} \frac{1}{2}\,k_{ijk}\,\Delta\varphi_{ijk}^2. \tag{5.20}$$

5.5.5 Pohybové rovnice

Pro odvození pohybových rovnic použijeme sestavení *Lagrangiánu* L, jenž je dán rozdílem $L = E_k - E_p$. Pohybové rovnice pak obdržíme z následujících výrazů, viz [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_{xi}} &= \frac{\partial L}{\partial x_i}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_{yi}} &= \frac{\partial L}{\partial y_i}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Jelikož je kinetická energie modelu pouze funkcí rychlosti a poenciální energie pouze funkcí polohy, můžeme tento výraz upravit do podoby:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial v_{xi}} &= \frac{\partial E_p}{\partial x_i}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial v_{yi}} &= \frac{\partial E_p}{\partial y_i}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Z výrazu pro kinetickou energii (5.10) dále přímo vyplývá:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d}{dt} v_{xi} &= \frac{\partial E_p}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d}{dt} v_{yi} &= \frac{\partial E_p}{\partial y_i}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Zbývá nejnáročnější úkol, kterým je derivace potenciální energie podle jednotlivých souřadnic. Zjednodušíme si zápis předpokladem konstantní tuhosti prutu, takže bude platit $k_{ij} = k_l$ a $k_{ijk} = k_\varphi$.

Soustřeďme se na pět vnitřních bodů modelu prutu s indexy $ijklm$, přičemž se budeme zabývat bodem s indexem k. Nejprve odvodíme derivaci podle souřadnice x_k:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{(ij)} \frac{1}{2} k_l \, \Delta l_{ij}^2 + \sum_{(ijk)} \frac{1}{2} k_\varphi \, \Delta\varphi_{ijk}^2 \right), \tag{5.24}$$

což můžeme upravit na:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} k_l \, (\Delta l_{jk}^2 + \Delta l_{kl}^2) + \frac{1}{2} k_\varphi \, (\Delta\varphi_{ijk}^2 + \Delta\varphi_{jkl}^2 + \Delta\varphi_{klm}^2) \right). \tag{5.25}$$

Derivujme výraz postupně, odstraněním druhých mocnin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial x_k} = k_l (\Delta l_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta l_{jk} + \Delta l_{kl} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta l_{kl}) + \\ k_\varphi (\Delta\varphi_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta\varphi_{ijk} + \Delta\varphi_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta\varphi_{jkl} + \Delta\varphi_{klm} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta\varphi_{klm}). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Vlevo od symbolů derivací se nám objevily síly (5.11) a momenty (5.16), což využijeme k dalšímu zjednodušení a projasnění:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_p}{\partial x_k} = F_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta l_{jk} + F_{kl}\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta l_{kl} + \\ M_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta\varphi_{ijk} + M_{jkl}\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta\varphi_{jkl} + M_{klm}\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta\varphi_{klm}.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Nyní se zaměříme na derivaci protažení translační pružiny Δl_{jk}:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta l_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} - l_{0jk}\right), \tag{5.28}$$

pro kterou platí:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta l_{jk} = \frac{x_k - x_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} = \frac{x_k - x_j}{l_{ajk}} = \cos\varphi_{jk}. \tag{5.29}$$

Obdobně platí:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta l_{kl} = -\cos\varphi_{kl},\\ &\frac{\partial}{\partial y_k}\Delta l_{jk} = \sin\varphi_{jk},\\ &\frac{\partial}{\partial y_k}\Delta l_{kl} = -\sin\varphi_{kl}.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Proveďme totéž s derivací pootočení rotační pružiny $\Delta\varphi_{ijk}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta\varphi_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\arctan\frac{y_k - y_j}{x_k - x_j} - \arctan\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} - \varphi_{0ijk}\right), \tag{5.31}$$

použitím známého výrazu:

$$\frac{\partial}{\partial x}\arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}, \tag{5.32}$$

dostáváme:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta\varphi_{ijk} = -\frac{1}{\left(\frac{y_k - y_j}{x_k - x_j}\right)^2 + 1}\,\frac{y_k - y_j}{(x_k - x_j)^2} = -\frac{y_k - y_j}{l_{ajk}^2} = -\frac{\sin\varphi_{jk}}{l_{ajk}}. \tag{5.33}$$

Analogicky:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta\varphi_{jkl} = \frac{\sin\varphi_{jk}}{l_{ajk}} + \frac{\sin\varphi_{kl}}{l_{akl}},\\ &\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta\varphi_{klm} = -\frac{\sin\varphi_{kl}}{l_{akl}},\end{aligned} \tag{5.34}$$

A pro derivaci podle y_k:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_k}\Delta\varphi_{ijk} &= \frac{\cos\varphi_{jk}}{l_{ajk}},\\
\frac{\partial}{\partial y_k}\Delta\varphi_{jkl} &= -\frac{\cos\varphi_{jk}}{l_{ajk}} - \frac{\cos\varphi_{kl}}{l_{akl}},\\
\frac{\partial}{\partial y_k}\Delta\varphi_{klm} &= \frac{\cos\varphi_{kl}}{l_{akl}}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Dosadíme odvozené výrazy do vztahu (5.27) a rozepíšeme i derivaci podle y_k:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_p}{\partial x_k} &= F_{jk}\cos\varphi_{jk} - F_{kl}\cos\varphi_{kl} + \\
&\quad -\frac{M_{ijk}}{l_{ajk}}\sin\varphi_{jk} + M_{jkl}\left(\frac{\sin\varphi_{jk}}{l_{ajk}} + \frac{\sin\varphi_{kl}}{l_{akl}}\right) - \frac{M_{klm}}{l_{akl}}\sin\varphi_{kl},\\
\frac{\partial E_p}{\partial y_k} &= F_{jk}\sin\varphi_{jk} - F_{kl}\sin\varphi_{kl} + \\
&\quad \frac{M_{ijk}}{l_{ajk}}\cos\varphi_{jk} - M_{jkl}\left(\frac{\cos\varphi_{jk}}{l_{ajk}} + \frac{\cos\varphi_{kl}}{l_{akl}}\right) + \frac{M_{klm}}{l_{akl}}\cos\varphi_{kl}.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Pohybové rovnice pro obecný bod s indexem k pak mají tvar:

$$\begin{aligned}
m_i\frac{d}{dt}v_{xi} &= F_{jk}\cos\varphi_{jk} - F_{kl}\cos\varphi_{kl} + \\
&\quad -\frac{M_{ijk}}{l_{ajk}}\sin\varphi_{jk} + M_{jkl}\left(\frac{\sin\varphi_{jk}}{l_{ajk}} + \frac{\sin\varphi_{kl}}{l_{akl}}\right) - \frac{M_{klm}}{l_{akl}}\sin\varphi_{kl},\\
m_i\frac{d}{dt}v_{yi} &= F_{jk}\sin\varphi_{jk} - F_{kl}\sin\varphi_{kl} + \\
&\quad \frac{M_{ijk}}{l_{ajk}}\cos\varphi_{jk} - M_{jkl}\left(\frac{\cos\varphi_{jk}}{l_{ajk}} + \frac{\cos\varphi_{kl}}{l_{akl}}\right) + \frac{M_{klm}}{l_{akl}}\cos\varphi_{kl}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

5.5.6 Linearizovaný model

Z výše uvedených pohybových rovnic (5.37) je zřejmé, že se jedná o nelineární model. Tento model lze snadno linearizovat. Orientujme přímý prut do směru osy x a předpokládejme velmi malé deformace. Pojmem malé deformace vyjadřujeme skutečnost, že pootočení rotačních pružin φ se blíží k nule. Rovnice tak můžeme zjednodušit dosazením $\sin\varphi = 0$ a $\cos\varphi = 1$:

$$\begin{aligned}
m_i\frac{d}{dt}v_{xi} &= F_{jk} - F_{kl},\\
m_i\frac{d}{dt}v_{yi} &= \frac{M_{ijk}}{l_{ajk}} - M_{jkl}\left(\frac{1}{l_{ajk}} + \frac{1}{l_{akl}}\right) + \frac{M_{klm}}{l_{akl}}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

V linearizované úloze zřetelně vidíme oddělený vliv normálových deformací (ve směru osy prutu) od ohybových (kolmo na osu prutu).

Příloha E: Videozáznamy

Balistická křivka: http://www.youtube.com/watch?v=YzDBH4AA540
Kolaps příhradového mostu: http://www.youtube.com/watch?v=hFwlnFdYWW4
Pružinový model trámce: http://www.youtube.com/watch?v=ppp35RRDE10