

# Kritická síla imperfektovaných systémů

Petr Frantík<sup>1</sup>, Jiří Macur<sup>2</sup>

## Úvod

V minulém století nově vzniklé obory, opírající se o studium silně nelineárních systémů, jako jsou *teorie katastrof*, *teorie bifurkací* a *teorie chaosu*, přinesly nejen do mechaniky nové způsoby náhledu na numerické modelování. Zásluhy na jejich vzniku má zejména Henri Poincaré, jenž již koncem 19. století odhaluje složitý pohyb tří gravitačně vázaných těles. Ukázalo se, že díky univerzálnosti projevů nelineárních systémů, jejím tzv. generic-kým vlastnostem, lze výstižnost modelu reálných soustav a procesů posuzovat odlišnými kritérii, než bylo doposud zvykem. Důležitým atributem modelu přestává být vysoká úroveň detailu či značný počet stupňů volnosti. Naopak, v návaznosti na obtížnost a časovou náročnost řešení silně nelineárních systémů je zvýhodněn model s minimálním počtem stupňů volnosti. Podstatným se stává kvalitativní a nikoliv kvantitativní hledisko vystižení reálného systému či procesu. Jinak řečeno model má vykazovat stejné *nelineární projevy* jako reálný systém.

Typickými nelineárními projevy – generic-kými vlastnostmi – jsou výskyty katastrofických přechodů, bifurkací, chaotického chování. Souhrnně jsou tyto projevy doprovázeny ztrátou stability jak reálného systému, tak i jeho numerického modelu. Vznikají zvláštní případy, kdy není jednoduché rozhodnout o správnosti získaných výsledků. Bylo a je třeba vytvořit netradiční přístupy pro porozumění takovým jevům.

Jednou z částí mechaniky, kde se setkáváme s potřebou užití nových metod, jsou pružné štíhlé konstrukce, které vlivem zatížení výrazně mění svou geometrii. Dochází k tzv. velkým přemístěním částí konstrukce, aniž by materiál z něhož je složena, ztrácel schopnost vracet se do původního stavu. Ačkoliv aplikace v tomto odvětví vyžadují nelineární matematický aparát, vykazují výbornou shodu s experimenty. Proto hrají důležitou roli v celé problematice nelineárních systémů.

V mechanice konstrukcí je velmi známým nelineárním projevem tzv. *vidličková bifurkace*. Dochází k ní mimo jiné při zatížení dokonale symetrického prutu dvěma stejně velkými silami působícími na jeho koncích proti sobě, viz obr. 1.

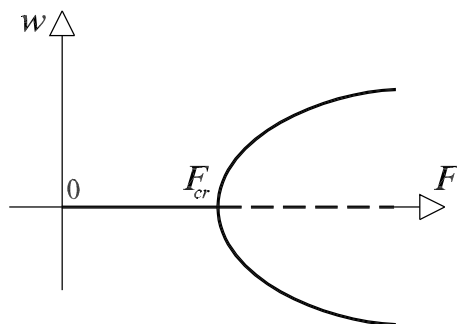


Obr. 1: Vzpěr přímého prutu

<sup>1</sup>Ing. Petr Frantík, Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: frantik.p@fce.vutbr.cz

<sup>2</sup>doc. RNDr. Jiří Macur, CSc., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav automatizace inženýrských úloh a informatiky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: macur.j@fce.vutbr.cz

Dosáhne-li velikost síly  $F$  kritické hodnoty označované  $F_{cr}$ , přestává být přímý tvar prutu stabilní a dochází k prudkému příčnému vybočení prutu na jednu ze dvou stran (v rovinné úloze). Vhodné znázornění této závislosti vypadá jako vidlička, viz obr. 2. Odtud její název vidličková bifurkace.



Obr. 2: Superkritická vidličková bifurkace

Na obr. 2 je zobrazen schematický graf příčného vybočení středního průřezu prutu (vzepětí), označeného symbolem  $w$ , v závislosti na velikosti vzpěrné síly  $F$ . Vidíme, že dosažením kritické síly dochází k nekonečně rychlému vzdalování dvou možných stabilních stavů<sup>3</sup>. Přímý tvar prutu se stává nestabilním stavem. Tento typ vidličkové bifurkace má přívlastek *superkritická*.

Úloha vzpěru prutu a různá její řešení jsou dnes velmi dobře známy. Již v roce 1744 publikoval Leonhard Euler první aproximaci ztráty stability prutu při dosažení kritické síly. Jeho řešení odvozené užitím tzv. teorie druhého řádu<sup>4</sup> nazýváme klasické. Předpokládá štíhlý prut tvořený lineárně se chovajícím materiálem a pro hodnotu kritické síly  $F_{cr}$  dává přesný vztah:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI, \quad (1)$$

kde  $L$  je délka prutu a  $EI$  jeho ohybová tuhost. Klasické řešení nám dává dobrou představu pouze pro velikost síly  $F$  menší než hodnota kritická  $F_{cr}$ . Díky němu víme, že je před dosažením kritické síly přímý tvar prutu stabilní. Obraz o ztrátě stability prutu je ovšem mlhavý. Řešení pouze ukazuje možné deformační tvary, kterými prut může náhle vybočit.

Přesné řešení pokritického vzpěru štíhlého prutu odvozuje Alexej Ruffovič Ržanicyn v polovině dvacátého století užitím eliptických integrálů. V knize [Ržanicyn 1955] publikuje explicitní vyjádření vzepětí prutu v závislosti na velikosti vzpěrné síly.

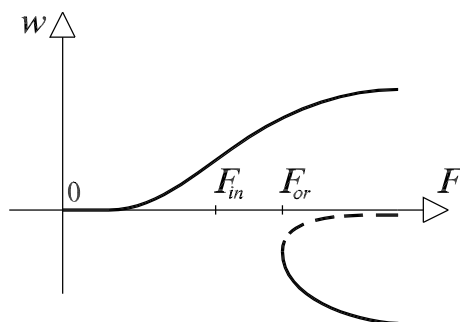
<sup>3</sup>Vzdálenost těchto stavů je úměrná  $\sqrt{\Delta F}$ , kde  $\Delta F = F - F_{cr}$ .

<sup>4</sup>V teorii druhého řádu uvažujeme vliv změny geometrie konstrukce na podmínky rovnováhy. Přemístění způsobující změnu geometrie prutu je předpokládáno pouze v příčném směru a je vztahováno k původnímu nedeformovanému tvaru.

## Imperfektované systémy

Výzkum doprovázející vznik teorie katastrof ukázal, že studované systémy lze rozdělit do dvou skupin na tzv. *typické* (též *regulární*), které nejsou citlivé na malou změnu svých parametrů a na systémy *netypické* (též *degenerované*), jejichž malá změna způsobí, že se z nich stanou systémy typické, viz [Arnold 1983]. Netypické systémy, jako je např. vzpěr dokonale symetrického prutu, se reálně nevyskytují. Jejich přechod na systém typický je doprovázen ztrátou symetrie, jako je tomu právě při vzpěru prutu. Již Henri Poincaré poukázal, že při studiu systémů s proměnlivými parametry se nelze vyhnout degenerovaným systémům, jelikož tyto rozdělují oblasti parametrů odpovídajících kvalitativně odlišným systémům typickým. Degenerované systémy tvoří neodstranitelné množiny a je třeba je brát do úvahy právě tehdy, když se studuje systém s proměnlivými parametry.

Prvek, jenž vnáší do systému nesymetrii, se nazývá *imperfekce* (odchylka od dokonalosti). Přidáním imperfekce do systému s vidličkovou bifurkací se výrazně mění chování systému. Při změně řídicího parametru<sup>5</sup> se již nesetkáváme s výskytem bifurkace na obr. 2. Stav systému se plynule vyvíjí, zatížený prut vybočuje jen na jednu stranu, viz obr. 3. Na opačné straně se v určitý okamžik zrodí „ze vzduchu“ dvojice větví, z nichž vnější je stabilní a vnitřní je nestabilní.



Obr. 3: Imperfektovaný systém se superkritickou vidličkovou bifurkací

Jelikož ve skutečnosti existují pouze systémy regulární, nabízí se otázka určování tak význačné hodnoty, jakou je kritická síla. Vhodným bodem pro měření bifurkační hodnoty  $F_{cr}$  je poloha inflexe závislosti  $w(F)$ . Označme velikost síly v inflexním bodě  $F_{in}$  (viz obr. 3). V publikaci [Macur & Frantík 2004] je dokázáno, že poloha inflexe  $F_{in}$  je v případě kubického modelu totožná s hodnotou bifurkační  $F_{cr}$  a nezávislá na velikosti imperfekce. U složitějších systémů s vidličkovou bifurkací lze předpokládat, že závislost hodnoty  $F_{in}$  na velikosti imperfekce bude buď konstantní, nebo alespoň monotónní. Jak bude ukázáno dále, je-li imperfekce „malá“, je poloha inflexního bodu od bifurkační hodnoty jen velmi málo odlišná.

Poznamenejme, že v inflexním bodě závislosti  $w(F)$  se stav systému nejrychleji mění (první derivace má lokální extrém), což dobře odpovídá jedné z vlastností kritické síly.

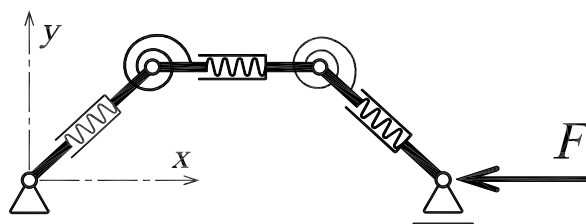
<sup>5</sup>V případě vzpěru prutu je řídicím parametrem velikost síly  $F$ .

Druhým význačným bodem, který se limitně ztotožní s bifurkační hodnotou řídicího parametru, je místo zrodu dvojice větví. Označme hodnotu síly pro tento bod  $F_{or}$ , viz obr. 3. Nachází-li se systém ve stavu odpovídajícím stabilní větvi takto zrozené, pak při poklesu řídicího parametru dojde při dosažení místa zrodu ke katastrofě – tzv. tvrdé ztrátě stability. Systém přejde na stabilní větev „na straně imperfekce“ a bez vnějšího zásahu se již do stavu na opačné straně nevrátí.

Jak bude ukázáno dále, hodnota  $F_{or}$  je na imperfekci velmi citlivá. Proto ji lze využít jako vhodné měřítko velikosti imperfekce.

### Numerický model prutu

Pro ověření popsaných teoretických závěrů byl vytvořen diskretní model sloužící k výpočtům velkých přemístění štíhlých prutů, poprvé popsaný v publikaci [Frantík 2004]. Prut je v modelu reprezentován zvoleným počtem tuhých dílců s vnitřními liniovými pružinami. Dílce jsou vzájemně spojeny klouby s rotačními pružinami, viz obr. 4. Užitou metodu lze nazvat fyzikální diskretizací<sup>6</sup>. Zařazení modelu do metod mechaniky přehledně uvádí studie [Henrych 1985].



Obr. 4: Model prutu

Oba typy pružin uvažujme jako lineární. Potenciální energii  $E_p$ , která se akumuluje v těchto pružinách lze zapsat ve tvaru:

$$E_p = \frac{1}{2} \left( k_l \sum_{i=1}^{n_l} dl_i^2 + k_f \sum_{i=1}^{n_f} d\varphi_i^2 \right), \quad (2)$$

kde  $n_l$  je počet liniových pružin,  $n_f$  je počet rotačních pružin,  $k_l$  je tuhost liniových pružin,  $k_f$  je tuhost rotačních pružin,  $dl_i$  je protažení  $i$ -tého dílce a  $d\varphi_i$  je natočení rotační pružiny (vzájemné pootočení dílců, které pružina spojuje). Předpokládejme, že deformační stav modelu prutu jednoznačně určují polohy všech jeho kloubů. Nechť je poloha každého kloubu dána dvojicí souřadnic  $(x_i, y_i)$ , kde  $i$  je index kloubu. Pro protažení liniové pružiny  $dl_i$  lze pak psát:

$$dl_i = l_i - l, \quad l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \quad (3)$$

<sup>6</sup>Fyzikální diskretizací se myslí vytvoření takového modelu konstrukce, který je svou podstatou diskretní, ovšem lze jej chápat jako možnou reálnou strukturu. Protějškem je diskretizace matematická, kdy se spojitý problém diskretizuje parametrizovanými funkcemi (tj. superpozicí funkcí s konečným počtem parametrů).

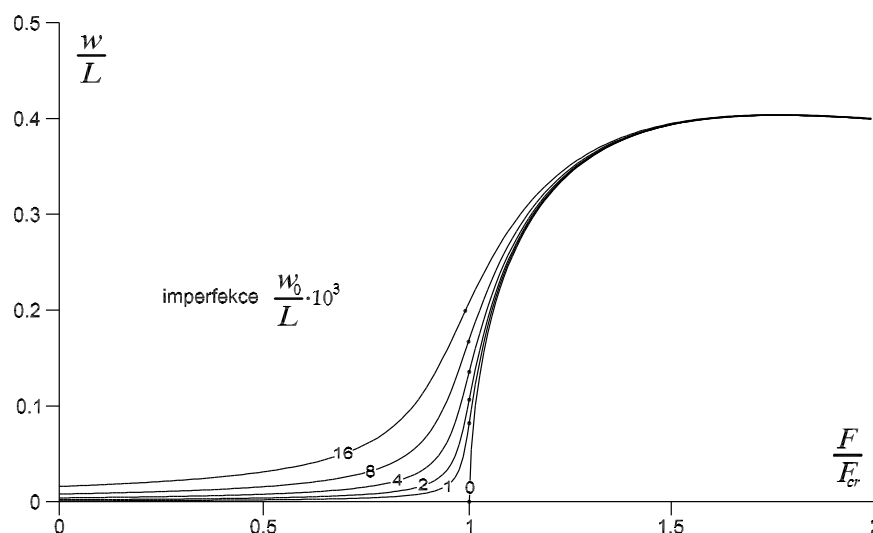
kde  $l$  je původní délka dílce (dílce bez napětí) a  $l_i$  je délka dílce po deformaci. Pro pootočení rotační pružiny  $d\varphi_i$  lze psát:

$$d\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad \sin \varphi_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i}, \quad (4)$$

kde  $\varphi_i$  je pootočení  $i$ -tého dílce. Ze vztahů (3) a (4) je patrné, že je užita geometricky přesná formulace modelu. Lze dokázat, že odezva modelu konverguje k přesnému řešení [Ržanicyn 1955], pokud zvyšujeme počet dílců a tuhost liniových pružin.

Model lze řešit například Newtonovou iterační metodou s užitím numerické derivace potenciální energie  $E_p$ . Dodejme, že obohacení modelu o zatížení a imperfekci<sup>7</sup> lze snadno provést rozšířením vztahu (2) o jejich energetickou bilanci.

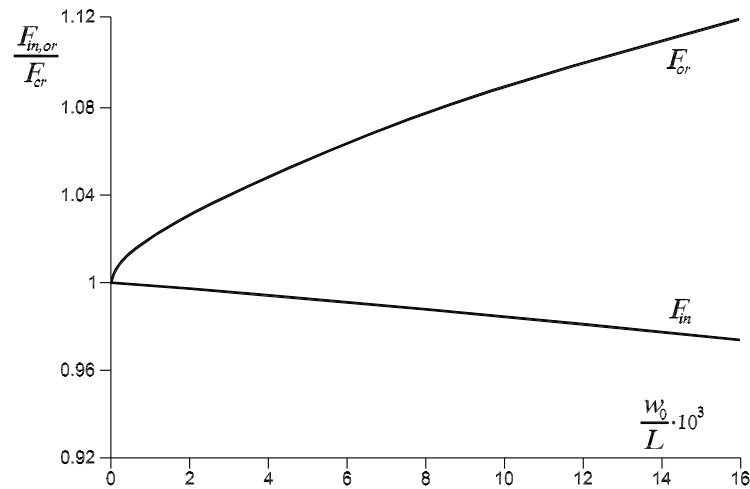
Na obr. 5 jsou vidět vypočtené závislosti vzepětí prutu  $w$  na vzpěrné síle  $F$  včetně vlivu imperfekce. Imperfekce je určena pomocí vzepětí prutu  $w_0$ , který není zatížen vzpěrnou silou  $F$ . Jeho hodnota je v grafu uváděna bezrozměrně. Ržanicynovu přesnému řešení odpovídá funkce s nulovou velikostí imperfekce. Inflexní body funkcí, respektive extrémy první derivace funkcí, jsou zvýrazněny puntíky.



Obr. 5: Graf vzepětí prutu s imperfekcí v bezrozměrném tvaru. Velikost imperfekce prutu je dána poměrem  $\frac{w_0}{L}$  (v promile), kde  $w_0$  je vzepětí nezatíženého prutu

Nakolik je poloha inflexního bodu  $F_{in}$  a poloha zrodu dvojice větví  $F_{or}$  závislá na velikosti imperfekce, ukazuje obr. 6. Je vidět, že pro malé imperfekce je hodnota  $F_{in}$  prakticky shodná s hodnotou kritické síly. Z grafu je patrné, že se poloha inflexního bodu  $F_{in}$  jen málo liší od bifurkační hodnoty  $F_{cr}$  i při imperfekci odpovídající prohnutí prutu více než jeden a půl centimetru na délku jeden metr. Jinak je tomu u hodnoty  $F_{or}$  popisující polohu zrodu. Funkce  $F_{or}(w_0)$  zřejmě nemá pro nulovou imperfekci derivaci.

<sup>7</sup>Imperfekce je v použitém modelu reprezentována pomocí síly působící uprostřed prutu ve směru osy  $y$ , viz obr. 4.



Obr. 6: Graf závislosti polohy inflexe a zrodu na velikosti imperfekce

## Závěr

V příspěvku bylo pojednáno o nelineárních systémech s vidličkovou bifurkací a vlivu imperfekce na jejich chování. Pomocí diskrétního nelineárního modelu vzpíraného prutu bylo ukázáno, že pro měření kritické síly imperfektovaného systému lze užít polohu inflexního bodu závislosti vzepětí prutu na velikosti vzpěrné síly. Velikost imperfekce systému lze stanovit pomocí polohy zrodu stabilní a nestabilní větve.

## Poděkování

Tento výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT, projekt 1M6840770001, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS.

## Literatura

- [Arnold 1983] Arnold, V. I., 1983: *Teória katastrof* (orig. Teorija katastrof, vydavateľstvo Moskevské univerzity 1983), vydavateľstvo Alfa, Bratislava
- [Frantík 2004] Frantík, P., 2004: Stability Study of the Elastic Loop, *5th International PhD Symposium in Civil Engineering*, Delft, Netherlands
- [Henrych 1985] Henrych, J., 1985: *Úplná soustava finitních metod mechaniky a možnosti dalšího rozvoje*, studie ČSAV 6.85, nakladatelství Akademia, Praha
- [Macur & Frantík 2004] Macur, J., Frantík, P., 2004: Stanovení kritické síly vzepjatého nosníku, konference *Pravděpodobnost porušování konstrukcí*, VUT FAST v Brně
- [Ržanicyn 1955] Ržanicyn, A., R., 1955: *Ustojčivost' ravnovesija uprugich sistem*, Gosudarstvennoje izdatel'stvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva