

ROTAČNÍ MODEL LUKU

ROTATIONAL MODEL OF A BOW

Petr Frantík¹

Abstrakt

Příspěvek je věnován odvození modelu luku s jedním stupněm volnosti ve kterém je lučiště nahrazeno dvojicí tuhých rotujících dílců s rotační pružinou. Lučiště je zde uvažováno jako prizmatický prut z lineárně se chovajícího materiálu. Odvození modelu luku je provedeno s uvážením geometrické nelinearity.

Klíčová slova

luk, model s jedním stupněm volnosti, geometrická nelinearita, vzpěr prutu

Abstract

The paper is focused on derivation of a model of a bow with single degree of freedom in which are bended limbs represented by rotating arms with rotational spring. The bow is considered here as straight with prismatic limbs of linear material. In the derivation of the model of the bow the geometrical nonlinearity is assumed.

Keywords

bow, single-degree-of-freedom model, geometrical nonlinearity, beam buckling

1 Úvod

Příspěvek navazuje na článek [1], prezentovaný na této konferenci, ve kterém je odvozen model s jedním stupněm volnosti s lučištěm nahrazeným svislou translační pružinou. Srovnání s přesnějším numerickým modelem však ukázalo, že (za daných předpokladů) takový model nedostatečně vystihuje vývoj deformace celého luku zejména kvůli značné rotaci táhla reprezentujícího tětivu. Výsledek byl neuspokojivý a vedl k motivaci nalézt výstižnější model, jenž je představen zde.

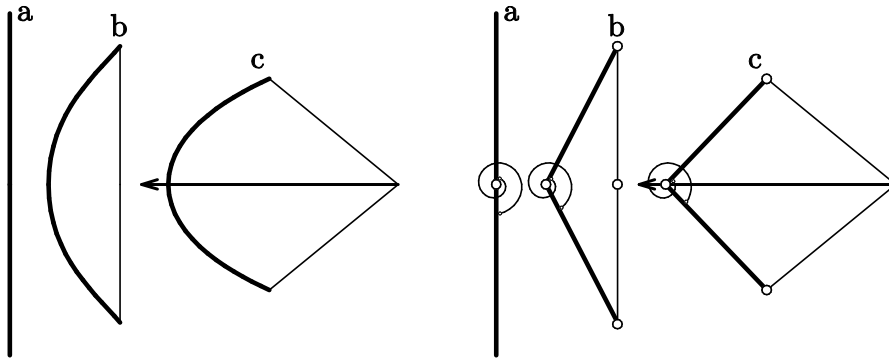
Lučiště je v nově navrženém modelu nahrazeno dvojicí rotujících tuhých dílců spojených na ose symetrie rotační pružinou, viz obr. 1. Jsou zde znázorněny tři stavy luku. První, označený jako a) odpovídá volnému lučišti bez tětivy. Stav b) je luk s napnutou tětivou (bez nátahu) a stav c) odpovídá luku při nátahu se založeným šípem.

2 Odvození náťahové síly

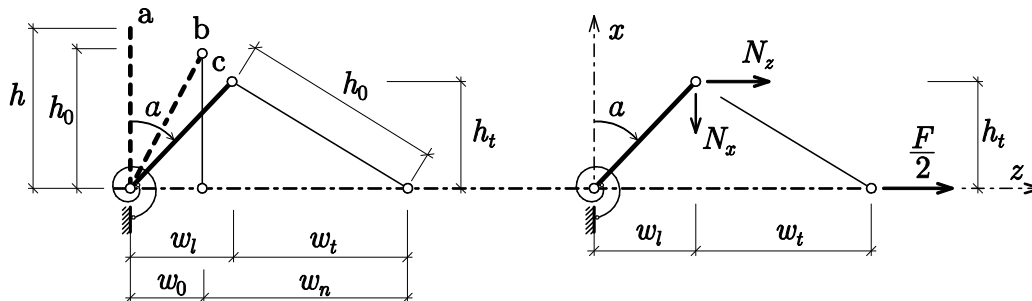
Na rozdíl od modelu s translační pružinou [1], je u modelu s rotační pružinou snadné vyjádřit závislost náťahové síly F na délce nátahu w_n , viz obr. 2. Původní model má

¹ Ing. Petr Frantík, Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, ČR, e-mail: kitnarf@centrum.cz

závislost náhahové síly F vyjádřenu pouze vůči délce průmětu tětivy w_t , jelikož snaha o doplnění závislosti na délce náhahu w_n nebyla z analytického hlediska úspěšná.



Obr. 1: Jednoduchý luk (vlevo) a jeho model z kyvných dílců (vpravo) včetně tří stavů: a) lučiště s nenapnutou tětívou, b) s napnutou tětívou a c) natažený luk se založeným šípem před vypuštěním.



Obr. 2: Schéma rotačního modelu luku a působících sil

Odvození začneme momentovou podmínkou rovnováhy ke kloubu s rotační pružinou:

$$M(\alpha) = N_x \cdot w_l + N_z \cdot h_t, \tag{1}$$

kde M je moment, kterým rotační pružina působí na tuhý dílec nahrazující polovinu lučiště, α je pootočení dílce vůči svislé ose (nenapjatému lučišti), N_x je svislá složka normálové síly v tětívě, $N_z = F/2$ je vodorovná složka normálové síly v tětívě, w_l je vodorovné posunutí koncového bodu tuhého dílce a h_t je vzdálenost koncového bodu tuhého dílce od osy symetrie. Jelikož výslednice složek normálové síly v tětívě musí působit ve směru tětivy, tak platí:

$$\frac{N_x}{N_z} = \frac{h_t}{w_l}. \tag{2}$$

Dosazením do vztahu (1) a úpravou dostaneme výraz pro vodorovnou složku N_z :

$$N_z = \frac{M(\alpha)}{h_t \left(1 + \frac{w_l}{w_t} \right)} = \frac{F}{2}. \tag{3}$$

Další úpravu provedeme tak, aby výraz (3) závisel pouze na neznámé vzdálenosti h_t . Z pravoúhlých trojúhelníků tvořených tuhým ramenem a tětívou dostáváme vztahy:

$$\begin{aligned}
 w_t &= \sqrt{h_0^2 - h_t^2}, \\
 w_l &= \sqrt{h^2 - h_t^2}, \\
 \cos \alpha &= \frac{h_t}{h},
 \end{aligned} \tag{4}$$

kde $h_0 = L_t/2$ je polovina délky tětiny L_t a $h = L/2$ je polovina délky lučiště L . Dosazením a úpravou získáme výraz závislejší pouze na neznámé h_t :

$$N_z = \frac{M(\alpha)}{h_t \left(1 + \sqrt{\frac{h^2 - h_t^2}{h_0^2 - h_t^2}} \right)} = \frac{F}{2}, \quad \alpha = \arccos \frac{h_t}{h}, \tag{5}$$

Nyní stanovíme neznámou vzdálenost h_t z geometrie patrné na obr. 2. Platí:

$$\begin{aligned}
 w_n + w_0 &= w_l + w_t, \\
 w_0 &= \sqrt{h^2 - h_0^2},
 \end{aligned} \tag{6}$$

kde w_0 je posunutí koncového bodu lučiště, ke kterému došlo vlivem napnutí tětiny. Dosazením výrazů (4) získáme opět závislost na vzdálenosti h_t :

$$w_n + w_0 = \sqrt{h^2 - h_t^2} + \sqrt{h_0^2 - h_t^2}. \tag{7}$$

Nyní potřebujeme tento vztah upravit tak, abychom měli explicitní výraz pro neznámou vzdálenost h_t . Nejprve celou rovnici podělíme levou stranou výrazu (7):

$$1 = \frac{\sqrt{h^2 - h_t^2} + \sqrt{h_0^2 - h_t^2}}{w_n + w_0} = \sqrt{\frac{h^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}} + \sqrt{\frac{h_0^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}}, \tag{8}$$

převědeme jednu odmocninu na opačnou stranu:

$$1 - \sqrt{\frac{h^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}} = \sqrt{\frac{h_0^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}}, \tag{9}$$

umocníme nadruhou:

$$\left(1 - \sqrt{\frac{h^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}} \right)^2 = \frac{h_0^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}, \tag{10}$$

roznásobíme levou stranu:

$$1 - 2\sqrt{\frac{h^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}} + \frac{h^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2} = \frac{h_0^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}, \tag{11}$$

osamostatníme zbývající odmocninu:

$$2\sqrt{\frac{h^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2}} = \frac{h^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2} - \frac{h_0^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2} + 1 = \frac{h^2 - h_0^2}{(w_n + w_0)^2} + 1, \tag{12}$$

opět umocníme nadruhou:

$$4\frac{h^2 - h_t^2}{(w_n + w_0)^2} = \left(\frac{h^2 - h_0^2}{(w_n + w_0)^2} + 1 \right)^2 = \left(\frac{h^2 - h_0^2 + (w_n + w_0)^2}{(w_n + w_0)^2} \right)^2, \tag{13}$$

vy násobíme jmenovatelem levé strany:

$$4h^2 - 4h_t^2 = \frac{(h^2 - h_0^2 + (w_n + w_0)^2)^2}{(w_n + w_0)^2}, \tag{14}$$

osamostatně hledanou neznámou h_i :

$$h_i^2 = h^2 - \frac{(h^2 - h_0^2 + (w_n + w_0)^2)^2}{4(w_n + w_0)^2}, \quad (15)$$

a nakonec odmocníme:

$$h_i(w_n) = \pm \sqrt{h^2 - \frac{(h^2 - h_0^2 + (w_n + w_0)^2)^2}{4(w_n + w_0)^2}}, \quad w_n \in (0; w_{n,\max}), \quad w_{n,\max} = h + h_0 - w_0. \quad (16)$$

Dodejme, že potřebnou hodnotou je kladná složka řešení, odpovídající znaménku plus před odmocninou.

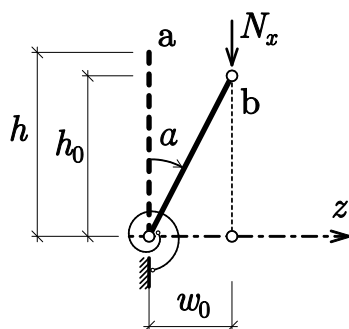
Výpočet náťahové síly F tedy probíhá tak, že se pro daný náťah w_n stanoví vzdálenost h_i podle vztahu (16), která se dosadí do vztahu (5).

3 Lineární aproximace lučiště

Vztah (5) pro náťahovou sílu F vyžaduje určení závislosti momentu M rotační pružiny na pootočení α tuhého dílce. Uvažujme lineární pružinu danou funkcí:

$$M(\alpha) = k\alpha, \quad (17)$$

kde k je tuhost rotační pružiny. Tuto tuhost nastavíme tak, aby kritická síla $N_{x,\text{cr}}$ při ztrátě stability modelu vlivem napnutí tětiny odpovídala kritické síle lučiště tvořeného prizmatickým prutem, viz obr. 3.



Obr. 3: Dílec zatížený napnutou tětinou

Pro tuhý dílec pootočený o úhel α upravíme momentovou podmínku rovnováhy (1), odstraněním nulové vodorovné složky N_z (tětina je ve svislé poloze):

$$\begin{aligned} M(\alpha) - N_x \cdot w_0 &= 0, \\ k\alpha - N_x \cdot h \cdot \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Nyní aproximujeme funkci sinus prvním členem Taylorova rozvoje:

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad (19)$$

a dosadíme do podmínky rovnováhy (18) a upravíme:

$$\begin{aligned} k\alpha - N_x h \alpha &= 0, \\ k - N_x h &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$N_{x,\text{cr}} = \frac{k}{h}.$$

Tuto kritickou sílu položíme rovnu kritické síle lučiště:

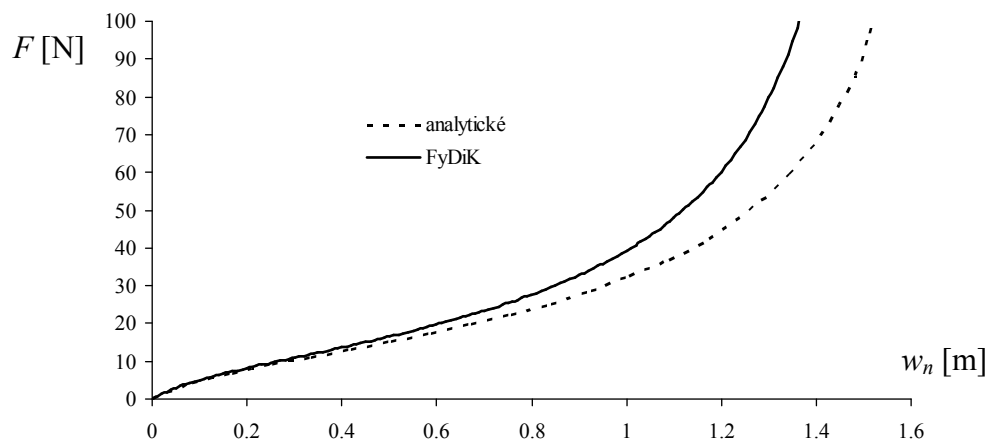
$$N_{x,\text{cr}} = \frac{k}{h} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}, \quad (21)$$

z čehož plyne:

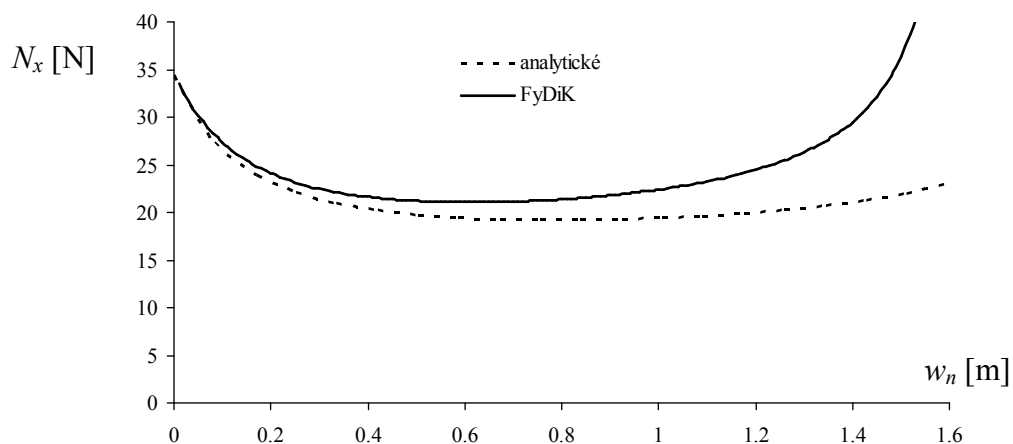
$$k = \pi^2 \frac{EI}{L^2} h = \pi^2 \frac{EI}{2L}. \quad (22)$$

4 Srovnání řešení

Na obr. 4 a 5 je vidět graf srovnání odvozené závislosti (5) náťahové síly F , resp. svislé složky N_x síly v tětivě, na délce náťahu w_n , aproximující luk tvořený lučištěm z jasanu délky 2 m, s obdélníkovým průřezem 30×7 mm a modulem pružnosti $E = 16$ GPa (viz [2]). Z grafického srovnání je patrná dobrá úroveň aproximace rotačního modelu vzhledem k výsledku numerické simulace prutového modelu FyDiK2D, viz [3].

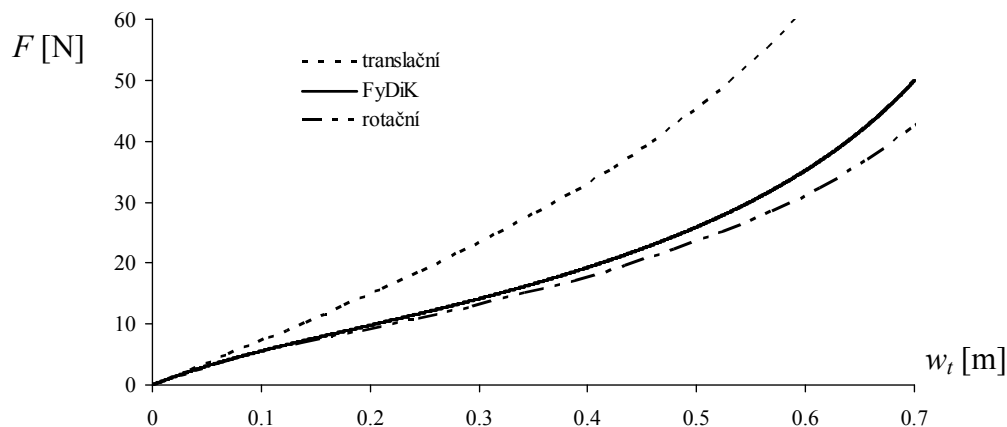


Obr. 4: Průběh náťahové síly F v závislosti na délce náťahu w_n

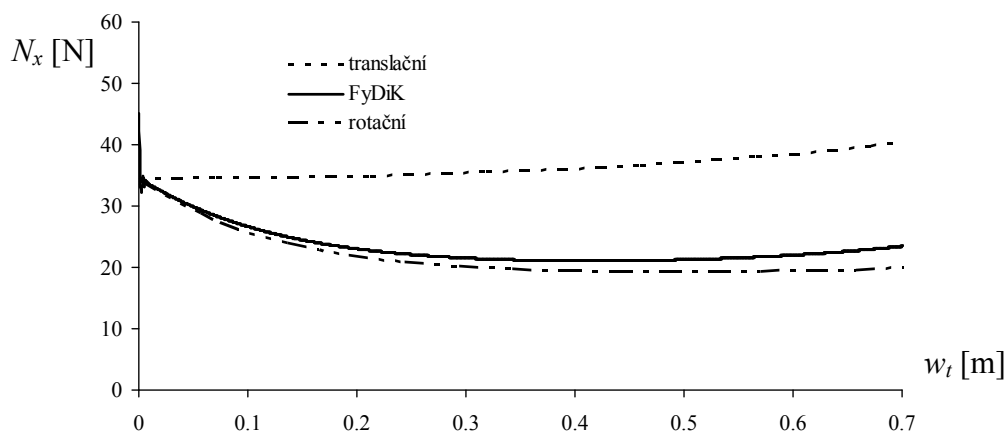


Obr. 5: Průběh svislé složky N_x normálové síly v tětivě v závislosti na délce náťahu w_n

Srovnání s modelem [1] uvažujícím translační pružinu je vidět na obr. 6 a 7. Jedná se opět o závislost náťahové síly F a svislé složky N_x normálové síly v tětivě. Tentokrát ovšem na délce průmětu tětivy w_t do vodorovné osy x . Z obrázku je patrná výrazně lepší výstižnost modelu s rotačním dílcem, dosažená díky zohlednění deformačního vlivu úhlu tětivy.



Obr. 6: Srovnání závislosti náťahové síly F na délce průmětu tětiny w_t pro tři modely



Obr. 7: Srovnání závislosti svislé složky N_x síly v tětině na délce průmětu tětiny w_t pro tři modely

5 Závěr

Článek prezentoval odvození analytického výrazu pro model luku tvořený dvěma tuhými dílci s rotační pružinou, včetně lineární aproximace rotační pružiny zvolené tak, aby se kritická síla modelu shodovala s kritickou silou lučičtě. Tento model se po srovnání s numerickým řešením ukázal jako výstižnější oproti modelu s translační pružinou [1].

Poděkování

Výsledek byl vytvořen za finanční podpory v rámci projektu reg. č. FAST-S-16-3803.

Literatura

- [1] FRANTÍK, P. Model luku s jedním stupněm volnosti. Mezinárodní konference *Modelování v mechanice 2016*, VŠB–TU Ostrava 2016.
- [2] LEHKÝ, D., FRANTÍK, P. Dynamický experiment na sadě dřevěných konzolových nosníků. Konference *70 roků SvF STU*, Bratislava 2008.
- [3] FRANTÍK, P. Diskrétní model FyDiK2D. Mezinárodní konference *Modelování v mechanice 2009*, VŠB–TU Ostrava 2009.